ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
127

For Senior & Graduate Courses

ランダム行列とゲージ理論

〈普遍性〉を通して捉える量子物理

◆

西垣 真祐　著



サイエンス社

SGC ライブラリ-127

ランダム行列とゲージ理論

〈普遍性〉を通して捉える量子物理

西垣 真祐 著

サイエンス社

SGCライブラリ（The Library for **S**enior & **G**raduate **C**ourses）

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），
脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

※ SGC1～76 省略（品切含）

77 重点解説 ジョルダン標準形
西山享著 本体 1905 円

78 重点解説 ベクトル・テンソル
森川雅博著 本体 2095 円

79 行列解析の基礎
山本哲朗著 本体 2190 円

80 超弦理論の基礎
今村洋介著 本体 2429 円

81 繰りこみ群の物理と数理
伊東恵一著 本体 2190 円

82 超重力理論
谷井義彰著 本体 2381 円

83 共形場理論
伊藤克司著 本体 2238 円

84 演習形式で学ぶ相転移・臨界現象
宮下精二・轟木義一 共著 本体 2476 円

85 実例で学ぶ精度保証付き数値計算
中尾充宏・渡部善隆 共著 本体 2362 円

86 リーマン予想の数理物理
黒川信重・小山信也 共著 本体 2190 円

87 量子多体系の物理
藤本聡・川上則雄 共著 本体 2190 円

88 演習形式で学ぶリー群・リー環
示野信一著 本体 2381 円

89 弦理論の代数的基礎
髙橋篤史著 本体 2476 円

90 アインシュタイン方程式
白水徹也著 本体 2238 円

91 CP 対称性の破れ
林青司著 本体 2476 円

92 弦の場の理論
石橋延幸・村上公一 共著 本体 2429 円

93 超弦理論の応用
夏梅誠著 本体 2495 円

94 複素多様体論講義
辻元著 本体 2362 円

95 幾何学の量子化
前田吉昭・佐古彰史 共著 本体 2429 円

96 量子力学から超対称性へ
坂本眞人著 本体 2476 円

97 行列解析ノート
山本哲朗著 本体 2000 円

98 無限量子系の物理と数理
小嶋泉・岡村和弥 共著 本体 2381 円

99 現代宇宙論講義
辻川信二著 本体 2476 円

100 クォーク・ハドロン物理学入門
国広悌二著 本体 2238 円

101 統計力学から理解する超伝導理論
北孝文著 本体 2457 円

102 量子力学ノート
佐藤文隆著 本体 2238 円

103 量子情報と時空の物理
堀田昌寛著 本体 2457 円

104 弦理論と行列模型
土屋麻人著 本体 2238 円

105 ディラック方程式
日笠健一著 本体 2295 円

106 ホログラフィー原理と量子エンタングルメント
高柳匡著 本体 2407 円

107 パーコレーション理論講義
樋口保成著 本体 2194 円

108 格子模型の数理物理
南和彦著 本体 2222 円

109 数物系のためのミラー対称性入門
秦泉寺雅夫著 本体 2500 円

110 情報幾何学の新展開
甘利俊一著 本体 2593 円

111 作用素環と無限量子系
松井卓著 本体 2083 円

112 重力とエントロピー
福間将文・酒谷雄峰 共著 本体 2546 円

113 4 次元微分幾何学への招待
松下・鎌田・中田 共著 本体 2315 円

114 ゲージ理論の基礎数理
橋本義武著 本体 2315 円

115 ループ量子重力理論への招待
玉置孝至著 本体 2222 円

116 数理物理における固有値問題
楳田登美男著 本体 2130 円

117 幾何学的に理解する物理数学
園田英徳著 本体 2296 円

118 数物系のためのシンプレクティック幾何学入門
植田一石著 本体 2315 円

119 場の理論の構造と幾何
山崎雅人著 本体 2500 円

120 例題形式で探求する微積分学の基本定理
森田茂之著 本体 2037 円

121 対称性の自発的破れ
菅本晶夫・曺基哲 共著 本体 2315 円

122 可解な量子力学系の数理物理
佐々木隆著 本体 2241 円

123 量子測定と量子制御
沙川貴大・上田正仁 共著 本体 2407 円

124 現代幾何学への招待
宮岡礼子著 本体 2037 円

125 重点解説 スピンと磁性
川村光著 本体 2130 円

126 複素ニューラルネットワーク [第 2 版]
廣瀬明著 本体 2407 円

127 ランダム行列とゲージ理論
西垣真祐著 本体 2194 円

まえがき

本書はランダム行列理論への入門と，ゲージ理論への適用の解説を目的としている．対象としては古典解析力学から量子力学までの標準的な過程および線形代数学を履修し，場の量子論を学びつつある理工系学部4年生・大学院生以上を想定した．概ね前半は確率的に分布するエルミート行列の集団の固有値（準位）統計の一般論を導入し，後半はその技法を用いてゲージ場の量子論に関して得られる，ディラック演算子の準位統計を含む非摂動的性質について解説する．

ランダム行列理論の有用性の根拠は，「量子系がもつ複雑性のためにその局所的準位統計は系の詳細によらない静力学（キネマティック）的な性質で決定される」という普遍（ユニバーサリティ）性の予想にある．この予想を認めれば，物理的な量子系の対称性のみを共有しそれ以外は捨象した確率集団であって，局所的準位統計の熱力学極限が厳密に導出できる模型，すなわちランダム行列集団を複雑な量子系の代理として用いることができる．Einstein は 1917 年に，「古典的にカオス的な力学系は，有限個の量子数によってその量子準位を決定できない」という量子化に関わる根本的な疑問を提起したが[1]，上のシナリオはこの疑問に対する解答になり得る（BGS 予想）．本書の一方のブックエンドである**第1章**ではこの状況を解説することにより，以降の展開を動機付ける．

数理統計学の一主題であった，Wishart による 1920 年代の行列値確率集団の研究[2] を原子核物理に持ち込んだのは Wigner の慧眼である．当時の研究対象であった重原子核の共鳴準位の統計的挙動に関して 1956 年に Tennessee 州 Gatlinburg で行われた会議での講演[3] において彼は，

> Wigner: 素朴な方法で問題に取り組むならば，状況は理論上は極めて単純です．疑問は単に「ランダムな係数をもつ対称行列の固有値間距離はどのようなものか」ということです．その 2 つのエネルギー準位が一致する可能性が限りなく低いことは知られています．2 次元行列 $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$ を考えると固有値間の距離は $\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}$ です $\cdots$

から初等的に導かれる固有値間隔分布（Wigner 予想式）を挙げたのち，次の質疑応答を行った：

> Lane: 準位間隔の分布に相関があるか否かについてお考えを伺いたい．$\cdots$ 隣接する 2 つの間隔はランダムに選ばれるのか，あるいはその間に相関があるのでしょうか？
>
> Wigner: 数学者が既に式を導出した例が一つだけありますので挙げましょう．全ての行列要素がガウス分布をもつ N 次元実対称行列の場合です．その固有値の分布は
>
> $$P(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N)=\mathrm{e}^{-(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_N^2)}\,|(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\cdots(\lambda_N-\lambda_{N-1})|$$
>
> です．$\cdots$ 隣接する 2 つの準位の間隔の分布を計算するためには，両者の間を除いた範囲でその他の全ての準位について積分しなければなりませんが，私が知る限りではその計算はなされていません．しかし，少なくともこの場合においてさらなる相関があることは明らかですし，それは一般的なことであろうと考えます．
>
> Guth: この式の出典を伺ってよいでしょうか？
>
> Wigner: これは Wishart 分布と呼ばれています．

彼の「一般的と考える」の一言からは，少なくともある種の行列集団の族について，また深読みすれば重原子核を含む広範な物理系を含めて，局所的準位相関の普遍性を看破していたことが窺われる．1956 年時点では未解決であった「その計算」は，1962〜63 年（この年に Wigner はノーベル物理学賞を授与された）に発表された Dyson と Mehta の連続論文のなかで解決され[4]，「不変ランダム行列理論」として数学的に体系化されることになる．**第 2〜4 章**の大部分ではその内容を，予備知識としては調和振動子と水素原子の量子力学，およびリー群論の基礎知識以上を仮定せずに平易に導出する．

ランダム行列の普遍性が支配する対象は，カオス的ないし乱雑さを含む量子系に限られるものではない．ランダム行列のスペクトル中央（バルク）部における準位相関が，リーマン ζ 関数の非自明零点からメキシコ名物の個人バスの到着時刻に至る各種の点列の統計的挙動を記述することは，ランダム行列理論の解説文の冒頭でしばしば語られてきた．また，KPZ 方程式に従う界面成長の形状や直列に並んだ待ち行列の所用時間の分布が，ランダム行列のスペクトル端（ソフトエッジ）における準位相関で厳密に記述されることの証明は，数理物理における近年の重要な成果である．一方，Wishart の最初の研究対象であったウィシャート型 $\simeq$ カイラル型ランダム行列のハードエッジにおける準位統計は，1990 年代に非可換ゲージ理論や常/超伝導接合の物理といった，純粋数学からは隔たった領域に発展の場を得た．さらにその微視的固有値分布が L 関数の小さい零点の，ディリクレ指標に渉る統計分布を記述することが認識されるに至り，解析数論の一角に位置を占めることとなる．**第 5 章**では後段のゲージ理論への適用を念頭に置いて，（他書が取り上げる GUE ではなく）カイラル GUE を例に採って非線形 σ 模型およびレプリカ法を展開する．ここに至って，ランダム行列の普遍性の根源がレプリカ対称性の自発的破れにあることが明らかになる．

本書後半の**第 6 章**では強い相互作用のゲージ理論である QCD を導入（格子化を含む）し，ゲージ群のランクを無限大にするラージ N 極限，および特殊な場合における厳密解に関する行列積分の適用例について解説する．この部分のみは局所的準位統計ではなく，Wigner 半円則に代表されるランダム行列の巨視的準位分布に対応している．なお本書はゲージ理論を表題に掲げてはいるが，ゲージ場の量子論自体の一般論を基礎から解説することを目的としてはおらず，主として以下で使用される概念の紹介に留めている．一方**第 7 章**では，ゲージ理論におけるカイラル香（フレーバー）対称性の自発的破れがディラック演算子の原点近傍の準位統計に関わり，特に ε 領域とよばれる状況下でのディラック準位統計が普遍性ゆえにカイラルランダム行列の準位相関関数で記述されることを解説する．レプリカ対称性とカイラル対称性，および拡散（ディフューゾン）子と π 中間（メソン）子が同一の数学的実体（大域的対称性の動力（ダイナミカル）学的な破れに伴う擬南部–ゴールドストーンボゾン）であることがその根拠となる．さらに，各種の局所的準位相関関数の格子ゲージ場の数値シミュレーションによる検証について例示する．この部分は著者自身が目撃し，関与してきた現在進行形の研究の一断面である．Wigner 時代の原子核理論から発展し，基礎理論として確立された QCD に基づくことによってハドロン物理学と改称されたこの分野に，数十年の間全く別の経路で進化してきたランダム行列理論の数理が再び合流することは，偶然の産物を超えた必然性があると著者は感じている．

最後にもう一方のブックエンドである**第 8 章**では第 5 章以降の展開を踏まえて，第 1 章で提示した量子カオス系に対する BGS 予想の半古典的証明のスケッチを紹介する．カオス的力学系における周期軌道の邂逅対と非線形 σ 模型の摂動展開におけるファインマン図形が同一視できること，す

なわち「量子論における（仮想的な）南部–ゴールドストーン粒子=カオス的運動をする古典粒子」という量子–古典対応がその証明の核心にある．

本書では紙面の都合上，ランダム行列を扱う数理的手法として主に（歪）直交多項式法とレプリカ法を取り上げ，局所的準位相関を扱う他の強力な手法である，超対称 σ 模型法やパンルヴェ方程式によるフレドホルム行列式の解析解（Tracy–Widom 法）については触れず，後者の代理として求積法による数値評価を取り上げるに留めた．また，ゲージ理論での対応物から動機を得て発展した，ブラウン運動模型（ゲージ理論の文脈では虚数化学ポテンシャル），非エルミートランダム行列（同：実数化学ポテンシャル），有質量非カイラルランダム行列（同：3 次元ゲージ理論）などについては精々結果を引用するのみとしたことをお断りする．これらの発展に関心を抱かれた読者には原論文にあたることを推奨する．また，本書で扱った内容のうち幾つかの部分に関するより詳細な解説は本ライブラリ中に，量子カオス=SGC–1「カオスと量子物理学」，直交多項式=SGC–122「可解な量子力学系の数理物理」，強い相互作用およびカイラル対称性の破れ=SGC–100「クォーク・ハドロン物理学入門」，量子重力・超弦理論としての行列模型=SGC–104「弦理論と行列模型」がそれぞれ刊行されているので，是非参考にされたい．

準位統計の普遍性は，“混沌ゆえに秩序が創発される” という形而上学的思想の実体化である．この思想は，ランダムな微視的自由度を熱平均して得られる巨視的観測量を考え，その間に成立する普遍的関係式を導出する熱力学の正常進化形といえなくもないが，その結果が個別の数値ではなく確率分布という連続関数の形で与えられる点はランダム行列理論の著しく優れた特徴である．本書の参考文献として挙げた論文の arXiv 分類が素粒子物理学の理論 (hep-th)，格子理論 (hep-lat)，現象論 (hep-ph) の三領域に分散しているのみならず，固体物理学諸領域 (cond-mat)，カオス論 (chao-dyn)，数理物理学 (math-ph) および数学諸領域 (math) に渡っていることは，我田引水ながらランダム行列理論の内容と適用範囲の広範さの反映であると捉えていただきたい．本書がその豊かな内容に読者が触れる端緒となれば，著者としてこの上ない喜びである．

若輩であった著者を，素粒子論とランダム行列理論が交わる豊饒な領域に導いていただいた米谷民明氏と坂井典佑氏には深く感謝を申し上げます．Jacobus Verbaarschot 氏が拓き，今や一つの研究領域として確立された「QCD の有効理論としてのカイラルランダム行列理論」への著者の取り組みは，Poul Damgaard 氏との一連の共同研究から開始されました．本書に纏めた内容とその関連研究の共著者である，上記の四氏および Moshe Moshe 氏，Jean Zinn-Justin 氏，Gernot Akemann 氏，Tilo Wettig 氏，永尾太郎氏，Alex Kamenev 氏，Antonio García-García 氏，Gerald Dunne 氏，Tamás Kovács 氏ほかの研究者の方々に感謝致します．また，筆が進まない著者を忍耐をもって本書の出版に至らしめたサイエンス社の平勢耕介氏に深謝を呈します．最後に，いつも傍で笑顔をもって支えてくれる妻 美希にありがとうを伝えます．

2016 年 7 月　伯耆大山山麓にて

西垣 真祐

目　次

第 1 章

プロローグ：量子論とカオス

この章では，まず古典解析力学と量子力学の対応に関する基礎事項をまとめたうえで，「カオス的な古典力学系の量子化」に関するアインシュタインの問題提起を紹介し，それに対する一つの解答としてランダム行列を挙げる BGS 予想を導入する．

1.1 古典解析力学

古典力学系は座標と運動量の組である $2n$ 個の正準力学変数 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = (q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n)$ と，それらおよび時間 t の関数であるハミルトニアン $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ により指定され，力学変数の初期値を決めればその後の時間発展は正準運動方程式

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

により一意的に決定される．力学変数の組の取り方は一意的ではなく，$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ を座標とする位相空間のシンプレクティック 2 形式 $\sum_k dq_k \wedge dp_k$ を保つ変数変換（正準変換）

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \mapsto (\boldsymbol{q}', \boldsymbol{p}'), \quad \sum_k dq_k \wedge dp_k = \sum_k dq'_k \wedge dp'_k \tag{1.2}$$

は運動方程式 (1.1) の形を変えないことから，このような $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ と $(\boldsymbol{q}', \boldsymbol{p}')$ のどちらも対等な力学変数の組といえる．

正準変換前後の力学変数とハミルトニアンは，ある母関数 $S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}', t)$ により

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad q'_k = \frac{\partial S}{\partial p'_k}, \quad H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{1.3}$$

と結びつけられる．特に，$S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}', t) = \sum_k q_k p'_k + H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}', t)\Delta t$ ととることにより，(1.1) と (1.3) から次の定理が直ちに従う．

定理 1.1（リウヴィユの定理）　微小経過時間 Δt での時間発展によって関係付けられる力学変数間の関係

$$q'_k(t) = q_k(t+\Delta t) \simeq q_k(t) + \dot{q}_k(t)\Delta t,$$
$$p'_k(t) = p_k(t+\Delta t) \simeq p_k(t) + \dot{p}_k(t)\Delta t \tag{1.4}$$

は，(1.2) を満たす正準変換である．

正準変換によって新たな力学変数の組を初期条件を定める定数 $(\boldsymbol{q}'(t), \boldsymbol{p}'(t)) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$ にとると，$\dot{\beta}_k = \dot{\alpha}_k = 0 \Rightarrow H' = 0$ となるべきことからその母関数（ハミルトンの主関数）$S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ はハミルトン–ヤコビ方程式

$$H\left(\boldsymbol{q}, \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{1.5}$$

を満たす．特に H が時間 t をあらわに含まない場合には主関数を $S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = W(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha}) - Et$ と変数分離できる．この $W(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha})$ が，上の初期条件を満たす微分方程式 $H\left(\boldsymbol{q}, \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{q}}\right) = E$ の解として得られれば，運動量は座標の関数として

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k} \tag{1.6}$$

と表される．ただし初期条件を決めてもある座標点における運動量はもちろん一意的ではないので（振幅 A の調和振動子では往復で $\pm\sqrt{A^2 - q^2}$ の 2 値をとる），素朴には W は $\boldsymbol{q}$ の多価関数となってしまう．もし任意の $\boldsymbol{q}$ に対応する $\boldsymbol{p}$ が有限個 (N) である場合（タイプ a と呼ぶ）には，運動量を一意化するように $\boldsymbol{q}$ 空間の N 重被覆を考えればその上で W は $\boldsymbol{q}$ の一価関数となる．この意味での $\boldsymbol{q}$ 空間は一般に単連結ではなくなるが，その上で定義される 1 形式

$$\sum_k p_k dq_k = \sum_k \frac{\partial W}{\partial q_k} dq_k = dW$$

は全微分となるから，$\boldsymbol{q}$ 空間における任意の閉曲線 C にわたる周回積分

$$\oint_C \sum_k p_k dq_k \tag{1.7}$$

は C を連続的に変形しても値を変えない不変量である．また，$\boldsymbol{q}$ 空間中の任意の閉曲線は連続変形により有限 (M) 個の非可縮なサイクル $\{C_j\}_{j=1}^{M}$ の直和として表される．

1.2　量子化規則

実は前節後段の議論は，「ゾマーフェルトとエプシュタインの量子化条件について」と題されたアインシュタインの 1917 年論文[1] の前置きである．彼はこれを踏まえて，当時の前期量子論の範疇で次のように論じる：

タイプ a の力学系では，非可縮なサイクル C_j の位相不変量 (1.7) の

各々に対する M 個の条件（アインシュタイン–ブリリュアン–ケラーの量子化条件）

$$\oint_{C_j} \sum_k p_k dq_k = 2\pi\hbar n_j, \quad n_j \in \mathbb{Z} \ \ (j = 1, \ldots, M) \tag{1.8}$$

が 1 自由度系でのゾマーフェルトの量子化条件 $\oint p dq = 2\pi\hbar n$ の自然な拡張を与えるであろう．しかし，座標値に対応する運動量が一般に無限通りある場合（タイプ b）には有限葉の $\boldsymbol{q}$ 空間上の一価関数として $\boldsymbol{p}$ を定義することができない．この場合には独立なサイクルが無限個あるため，有限個の量子数 $(n_1, \ldots, n_M)$ で指定される条件 (1.8) の形では許容されるエネルギーを決定できない．

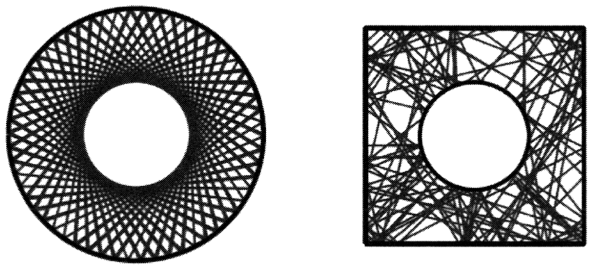


図 1.1　タイプ a（左）およびタイプ b（右）の力学系の例．

しかし現在の理工系学部の学生の大多数は，上の問題提起をさておいて，量子化の規則について次のように教えられているはずである：古典力学系が与えられればその力学変数を，状態ベクトルのなすヒルベルト空間 $\mathcal{V}$ に作用する演算子であって正準交換関係

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_l] = i\hbar\delta_{kl} \tag{1.9}$$

を満たすものと再解釈することにより，対応する量子力学系が自然に与えられる．量子力学のシュレーディンガー形式においてはもはや座標や運動量はその時間発展が曖昧さなしに決定できる力学変数ではなく，確率的にのみ予言できる物理量の一例に過ぎない．時間発展が厳密に決定できるという意味での「力学変数」はむしろ状態ベクトル $|\psi\rangle$，あるいはそれと $\mathcal{V}$ の特定の基底（例えば座標の固有状態 $|q\rangle$）との内積である波動関数 $\psi(q) = \langle q|\psi\rangle$ である．その時間発展は，古典的ハミルトニアンに置き換え $q_k \to \hat{q}_k, p_k \to \hat{p}_k$ をして得られる演算子の族からエルミート性 $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ を満たすように選んだ量子的ハミルトニアンによるシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \tag{1.10}$$

に適切な境界条件を付け加えて一意的に決定される．

古典力学においてハミルトニアンがある座標変数 q_k を含まない場合，それに共役な運動量変数 p_k が保存することは運動方程式 (1.1) から直ちに従う．特に，ハミルトニアンが時間をあらわに含まない場合 ($H = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$)，正準変換 (1.2) により時間を座標変数の一つ $q'_k = t$ にとったときに共役な力学変数となるハミルトニアン自身 $p'_k = H$ が保存量となる．この保存量の値をエネルギー E と呼ぶ．従ってこのような保存系では，運動は $2n$ 次元の位相空間のなかで力学変数の初期値を含む $2n-1$ 次元超曲面

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = E \tag{1.11}$$

内に常に留まる．この事実は，対応する量子力学においては定常性

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-i\omega t}|\psi\rangle$$

をもつように状態ベクトルを選び得ることに反映される．このときシュレーディンガー方程式 (1.10) は固有方程式

$$\hat{H}|\psi\rangle = \hbar\omega|\psi\rangle$$

に帰着し，固有値 $E = \hbar\omega$ は定常状態 $|\psi\rangle$ にある系においてエネルギーを測定した際に常に得られる値と解釈される...

このような“標準的な”授業を受けた聴講者は，アインシュタインの先の問題提起は前期量子論の技術的困難に過ぎず，シュレーディンガー方程式に基づく正統的な量子化においてはタイプ a と b に原理的な差異はないという印象を植え付けられるだろう．しかし果たして本当にそうであろうか？

1.3 調和振動子 2 種

アインシュタインのタイプ分類を説明するための読者に最もなじみが深い例として，質量 1，バネ定数 1 をもつ 1 次元調和振動子のハミルトニアン

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$$

を考える．このとき運動方程式 (1.1) は

$$\dot{q} = p,\ \dot{p} = -q \tag{1.12}$$

となる．これを (q,p) が張る平面内の流れの場と見て，流速ベクトル場 $\vec{v} = (p, -q)$ を図示すると図 1.2 左のようになる．運動方程式 (1.12) から正準変数の一方を消去すると $\ddot{q} = -q, \ddot{p} = -p$ となり，その線形独立な解が $\cos t$ と $\sin t$ であることから，位相空間中の任意の点は単一の周期 2π で時計回りの円運動をすることがわかる．この事実は正準形式を用いるまでもなく，教

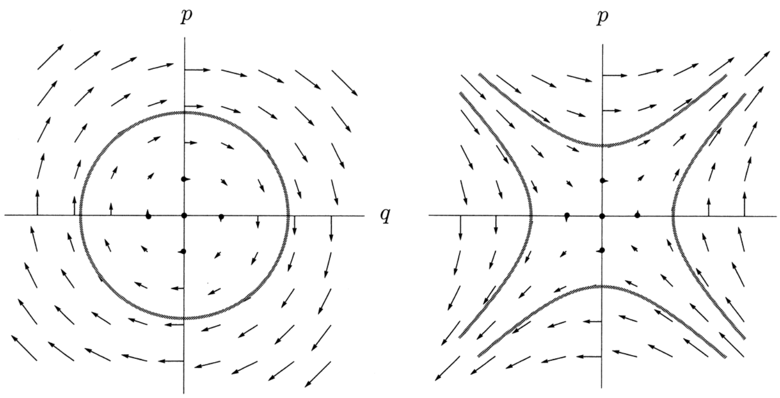


図 1.2　正（左図）および負（右図）のバネ定数をもつ調和振動子の位相空間の流れ．

会の大伽藍から吊るされたランプの運動からガリレイが気づいた「振り子の等時性」として 4 世紀前から知られている．平面内の任意の領域は，時間が経っても形を変えずに原点の周りを周回するので，確かにリウヴィユの定理は成立している．また，平面内の 2 点間の距離は時間によらず一定である．

次に，負のバネ定数 -1 をもつ場合

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}q^2$$

を考えよう．「負のバネ定数」とは非物理的に思われるかもしれないが，滑らかな丘の頂から転がり落ちる小球に類する，不安定な平衡点の近傍での運動と考えればむしろありふれた現象を記述している．このとき運動方程式 (1.1) は

$$\dot{q} = p,\ \dot{p} = q \tag{1.13}$$

となり，流速ベクトル場 $\vec{v} = (p,q)$ を図示すると図 1.2 右のようになる．こんどは平面中に小さい円盤状の領域をとると，時間発展によってある方向には指数関数的に膨張し，もう一方向には収縮する．このことは，(1.13) が力学変数のいずれについても $\ddot{q} = q, \ddot{p} = p$ となりその線形独立な解が $e^{\pm t}$ となること，およびリウヴィユの定理から位相空間中の領域の面積は時間発展で不変であるため，一方向に膨張するならばもう一方向には収縮せざるを得ないことから直ちにわかる．またこのとき，平面内の隣接する 2 点間の距離は（それらがたまたま収縮方向に並んでいない限り）時間が経つと一般に指数関数的に広がる．このように，正および負のバネ定数をもつ調和振動子の時間発展は本質的に異なっている．この差異は以下において，可積分系とカオス系，すなわちアインシュタインのタイプ a と b を特徴付けることとなる．

1.4　古典的カオス

古典的カオス系とは，後者の調和振動子の多自由系への自然な拡張である．これを正確に定義するため，まず位相空間の 1 点 $P = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ を始点とするベクトルの線形独立な組を $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ と記す．微小時間 Δt が経過して P が P' に移動したとき，ϵ を無限小パラメータとして $P + \epsilon v_i$ はそれぞれ $P' + \epsilon v'_i$ に移動したとする．この間の線形関係を

$$\begin{pmatrix} v'_1 & \cdots & v'_{2n} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_{2n} \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

と書くと，再びリウヴィユの定理から行列 M の行列式（ヤコビアン）は

$$\det M = 1$$

を満たす．これは M の $2n$ 個の固有値を $\{e^{\lambda_i \Delta t}\}$ と表すと $\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i = 0$ であることを意味するから，力学系の P 近傍の挙動は以下の 2 通りに分類できる．

定理 1.2　P 点における $\{\lambda_i\}$ を**リアプノフ指数**と呼ぶ．それらの実部は

1.　全て 0
2.　少なくとも一つが正，一つが負

のいずれかである．

この両者は，前節で述べた正・負のバネ定数をもつ調和振動子の一般化になっていることは明らかだろう．P の近傍の点を通る軌道は，上の 1. の場合には P を通る軌道に絡み付くのに対し，2. の場合には一般に P を通る軌道から指数関数的に遠ざかる．後者の場合には，ある時刻における初期条件の設定にどんなに僅かな誤差があったとしても，その差は時間とともに指数関数的に拡大し，十分時間が経過した後に力学変数は等エネルギー面内の任意の単位領域に等確率で見いだされるであろう（エルゴード性，ergodicity）．軌道は等エネルギー面を稠密に充満して，座標がある値 $\boldsymbol{q}$ の任意の微小近傍に回帰するときの運動量 $\boldsymbol{p}$ の値は無数に変化する（タイプ b）．この場合には，運動方程式を数値的に積分して時間発展を正確に決定することが事実上不可能になる．この事情から，位相空間の全ての点が少なくとも一つの実部正のリアプノフ指数をもつとき，力学系は**古典カオス系** (chaotic system) であると定義する．

次に少し別の観点から古典カオス系について考えてみよう．n 自由度の力学系が自由度と等しい個数の独立な保存量 $J_1, \cdots, J_n$ をもつ場合を考える．例えば中心力に従う点粒子 $H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^2/2 + V(|\boldsymbol{r}|)$ は 3 自由度系であるが，エネルギー E に加えて角運動量の z 成分 L_z と x 成分 L_x，ないしは角運動量の大きさ $\boldsymbol{L}^2$ と L_z が独立な 3 つの保存量をなす．なお角運動量の y 成分は L_z と L_x のポアソン括弧により $L_y = \{L_z, L_x\}$ と表されるので独立な保存量ではない．このような場合，保存量 J_i とそれに共役な変数（角変数）φ_i を正準変

数の組として選ぶと，力学系は本質的に各 φ_i 方向の自由運動の直積に分解される．このような系を**完全可積分系** (completely integrable system)，あるいは（上の chaotic と対比して）regular な系と呼ぶ．さらに等エネルギー面が有限体積をもつことを課すと，各 φ_i 方向の運動は周期運動にならざるを得ず，指数関数的膨張・収縮は起こりえない．従ってこの場合，位相空間の任意の点におけるリアプノフ指数の実部は全て 0 となる．周期運動では座標がある値をとるときの運動量はいつかは元に戻り，有限個で収まる（タイプ a)．この事実の対偶から，古典カオス系では自由度に比べて保存量の数が少なく，完全には変数分離ができないことがいえる．

1.5 量子的カオス

前節で定義した古典カオス系（アインシュタインのタイプ b）において，等エネルギー面の面積が有限な場合を考える．これは束縛状態を考えることに対応する．等エネルギー面内の小さな閉領域を考えると，時間の経過に伴ってこの領域は少なくとも一方向（固有値 $\lambda > 0$ の固有ベクトル方向）には指数関数的に膨張し，また別の一方向（固有値 $\lambda < 0$ の固有ベクトル方向）には収縮するから，結局いくらでも細長くなるように思われる．しかし，等エネルギー面のサイズは有限であり，いつかは領域の長軸のサイズがこれを超えてしまうことは矛盾である．この矛盾を避ける唯一の方法は，細長くなった領域がいつかは折り畳まれて等エネルギー面のサイズ以下に収まることである．従って，時間が十分経過すれば元々の領域は，面積を保ったまま引き延ばされた上でいくらでも複雑に折り畳まれて（通称「パイこね」，baker's map)，等エネルギー面に充満することになる（図 1.3)．

この事情を踏まえた上で，古典カオス系のハミルトニアンから正準交換関係 (1.9) を課すことにより量子力学を構成したとしよう．正準交換関係は，ある時刻における正準共役な物理量，特に座標と運動量の期待値の不確定性の積が $\hbar$ のオーダーを下回れないという，**ハイゼンベルクの不確定性関係**

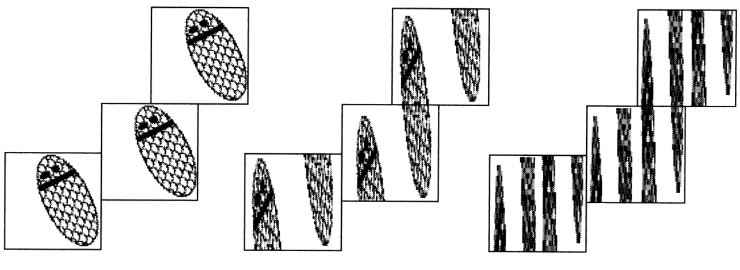


図 1.3　パイこね写像：時間発展（左→中央→右）に伴う位相空間の領域の変形．

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar/2 \tag{1.15}$$

を導く．しかしこれは，古典力学における，位相空間での「いくらでも複雑に折り畳まれた構造への時間発展」とは根本的に相容れない．ある状態ベクトル $|\psi\rangle$ の座標表示の波動関数 $\psi(q) = \langle q|\psi\rangle$ と運動量表示の波動関数 $\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$ は，共にいくらでも細かい構造をもつことはできない（もしできてしまうと (1.15) に反する）からである．従ってカオス系の量子力学においては，位相空間の最小面積単位である $\hbar$ の存在のため，構造の引き延ばし–折り畳み現象はこのスケールに到達すれば停止すると期待される．また，この意味で量子化は古典力学におけるカオス性を抑える方向に働くから，カオス系の量子力学は全くの混沌ではなく何らかの秩序を内包しており，それに基づいて波動関数やエネルギー固有値に対する定量的予言が可能になるのではないかと期待される．このような問題を対象とする分野を**量子カオス論**（quantum chaology）と呼ぶ．上に述べた定量的予言が可能となる典型的な対象は，ハミルトニアン演算子の固有値であるエネルギー準位の統計的な挙動であり，それを記述する**ランダム行列理論**が本書の主題となる．また，「何らかの秩序」の実態は「対称性の自発的破れ」とそれに伴う「南部–ゴールドストーン場」であり，この事情が量子カオス論とゲージ場の量子論を橋渡しするのである．以下の章では，この予告に徐々に実態を与えていく．

1.6 BT 予想と BGS 予想

完全可積分系とカオス系の区分は自由度の多寡ではなく，複数の自由度が完全に変数分離するか否かによるのであるから，2 次元面上を運動する質点でその本質は尽くされる．特に $\mathbb{R}^2$ 中の有界閉領域中を運動する質点（ビリヤード）について，次の定理が知られている．

定理 1.3（**ワイルの法則**） エネルギー固有値が微小範囲 $[E, E+dE]$ に含まれる状態の数として状態密度 $\rho(E)dE$ を定義する．面積 A のビリヤードの状態密度は定数に漸近する：（単位系 $m = \hbar = 1$ を用いる）

$$\rho(E) \to \frac{A}{2\pi} \quad (E \to \infty). \tag{1.16}$$

[証明] 正準交換関係 (1.9) より位相空間の体積 $\frac{d^2\boldsymbol{q}d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2}$ 毎に 1 状態が存在するため，

$$\rho(E)dE \sim \int_{E\leq \boldsymbol{p}^2/2\leq E+dE} \frac{d^2\boldsymbol{q}d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2} = \frac{A}{(2\pi)^2}2\pi p dp = \frac{A}{2\pi}dE. \quad \square$$

なお任意のコンパクトなリーマン面上の測地線運動についても上の定理は成立する．ビリヤード台の面積を $A = 2\pi$ と規格化すれば，エネルギー固有値の列 $E_1 \leq E_2 \leq \cdots$ は漸近的に平均間隔 1 をもつ点列をなす．このような規格化

された点列の統計的挙動を特徴付ける量として以下の関数を考える：

$$\text{準位間隔分布：} P(s,N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta(E_{i+1} - E_i - s), \tag{1.17}$$

$$\text{2 準位相関関数：} R_2(s,N) = \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} \delta(E_j - E_i - s). \tag{1.18}$$

上述の 2 種の力学系の典型例について，準位間隔分布を図 1.4 に示す．図中で両者をよくフィットすることが見てとれる 2 つの曲線について，左の完全可積分系の場合には次の予想が立てられている．

予想 1（ベリー–タボア[20]） 系が完全可積分なとき上の準位統計分布は，測度 0 の例外を除いて，同一分布に従う独立乱数（ポアソン集団）のそれに収束する：

$$P(s) := \lim_{N\to\infty} P(s,N) = \mathrm{e}^{-s}, \;\; R_2(s) := \lim_{N\to\infty} R_2(s,N) = \delta(s)+1. \tag{1.19}$$

なお $R_2(s)$ 中の $\delta(s)$ は (1.18) の和における $i=j$ の項による自明な成分であり，これを除いた連結成分 $R_{2c}(s)=1$ が独立乱数性を反映している．また「測度 0 の例外」とは，(θ,φ) 方向に運動が分離する球面 S^2 で固有値が $\ell(\ell+1)$ $(\ell\in\mathbb{N})$（各々 $(2\ell+1)$ 重縮退）に比例する例，あるいは (x,y) 方向に運動が分離する正方トーラス $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で固有値が $n_x^2+n_y^2$ $(n_x,n_y\in\mathbb{Z})$ に比例する例などであり，いずれも固有値は有限な定数の整数倍であるからその間隔分布は連続関数である e^{-s} に収束し得ないが，そのような場合は理論のパラメータ空間中で測度 0 集合であることを意味する．この予想の一般証明は未知であるが，長方トーラス（固有値 $\propto n_x^2+\alpha n_y^2$）や磁束が貫く正方トーラス（固有値 $\propto (n_x-\alpha)^2+(n_y-\beta)^2$）で α または β がディオファントス数である場合など，個々については証明できる場合がある[21],[22]．

一方，上の予想と対比をなすカオス的な力学系の量子準位についても，図 1.4 右図など多くの数値実験に基づいて準位統計分布の普遍性が予想された：

予想 2（ボイーガス–ジャノンニ–シュミット[23]） 系がカオス的なとき上の準位統計分布は，ハミルトニアンの対合的対称性を共有するランダム行列の熱力学極限でのそれに収束する．

第 2, 3 章では，この予想のいう「ランダム行列の準位統計分布」を定義し，そのスケーリング極限を導出する．この予想の部分的な証明（$R_2(s)$ の $s\gg 1$ での漸近形）はベリーらによって周期軌道論に基づいて早くに与えられたが，$R_2(s)$ の全体については困難と考えられていた．しかしミュラーらは，周期軌道の総和を巧妙に行うことによりついに BGS 予想の半古典的証明を完成させた[24]．量子カオス論のランドマークというべきこの研究については，最終章で解説する．

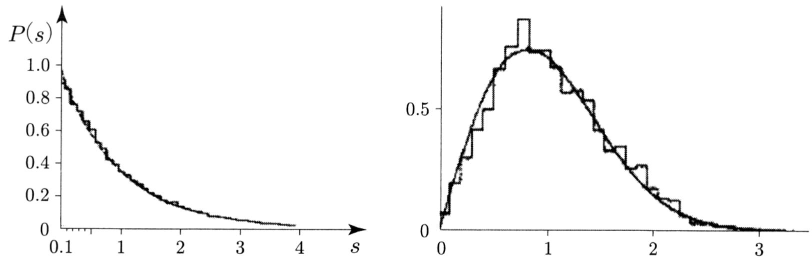


図 1.4 完全可積分系とカオス系の準位間隔分布．[左] 無理数の辺長比をもつ長方形中のビリヤード，[右] 強磁場中の水素原子．実線はポアソン分布（左）と GOE ウィグナー分布（右）．

演習問題

1.1 (1.4) の展開形 $q'_k \simeq q_k + \dot{q}_k \Delta t$, $p'_k \simeq p_k + \dot{p}_k \Delta t$ と運動方程式 (1.1)，および $\wedge$ 積の反対称性を用いて $\sum_k dq'_k \wedge dp'_k$ を Δt の 1 次まで計算することにより，リウヴィユの定理を証明せよ．

1.2 線分 $[0, N]$ 中に一様分布する N 個の独立乱数 $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ を考える．線分中の幅 s の区間が λ_i を 1 つも含まない確率 $E(s, N)$ とその 2 階微分 $P(s, N) = (\frac{\partial}{\partial s})^2 E(s, N)$ を求め，これが (1.19) に収束することを示せ．

第 2 章

ランダム行列

ランダム行列は量子カオス系の準位統計を普遍的に記述する理論としてボイーガスらにより予想された．本章ではランダム行列の分類から始め，それらの準位統計を扱う標準的かつ最も有力な手法である，直交多項式法について解説する．

2.1 時間反転

古典力学における時間反転対称性とは，時間の進行方向を反転する変換 $t \mapsto -t$ に対して運動方程式ないしハミルトニアンが形を変えず，従ってある軌跡に沿う運動があればその軌跡を逆行する運動も可能であることを意味する．一方，磁場 $\boldsymbol{B}$ 中を運動する荷電粒子に働くローレンツ力 $\boldsymbol{F} = q\,\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}$ は，速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{r}}$ を反転すると力の向きが変わるため軌道の逆行は許されず，時間反転対称性をもたない例を与える．ローレンツ力はハミルトニアン中の磁気相互作用項 $\propto \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{B}$ に由来し，角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ が擬ベクトルであるため磁気相互作用は時間反転対称性を破るとも換言できる．

次に量子力学における時間反転対称性について考えよう．量子的ハミルトニアン $\hat{H}$ は状態ベクトルの張る一般には無限次元のヒルベルト空間 $\mathcal{V}$ に作用するエルミートな線形演算子であるが，ある完全系 $\{|i\rangle\}$ を基底として選ぶと $H_{ij} = \langle i|\hat{H}|j\rangle$ を要素とするエルミート行列 $H = H^\dagger$ と同一視されるので，以下ではこれらを区別せず，$\hat{}$ を略す．

シュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \tag{2.1}$$

を満たす $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{V}$ が与えられたとき，時間反転された変数 $t' = -t$ をもつ $|\psi(t')\rangle \in \mathcal{V}$ で (2.1) と同じ形の方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt'}|\psi(t')\rangle = H|\psi(t')\rangle$$

を満たすものが $\mathcal{V}$ の適当な自己同形 $\mathcal{T} : |\psi(t)\rangle \mapsto |\psi(t')\rangle = \mathcal{T}|\psi(t)\rangle$ によって必ず作れれば，この量子系は時間反転対称性をもつといえるだろう．このとき

$$-(\mathcal{T}^{-1} i \mathcal{T})\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = (\mathcal{T}^{-1} H \mathcal{T})|\psi(t)\rangle$$

となるが，H があらわに t に依存しない場合は $[H, \mathcal{T}] = 0$ すなわち $\mathcal{T}^{-1} H \mathcal{T} = H$ であるから，(2.1) と比較して $\mathcal{T}$ は反ユニタリー性 $\mathcal{T}^{-1} i \mathcal{T} = -i$ をもたなければならない．このような $\mathcal{T}$ は必ず，複素共役操作 K とユニタリー行列 Ω の作用の合成 $\mathcal{T} = K\Omega$ として表される．$\mathcal{T}$ を 2 回繰り返す操作は物理を全く変えず，従って高々状態ベクトルの位相を一斉に変化させる $\mathcal{T}^2 = \mathrm{e}^{i\alpha} \times$（単位行列 I）になる必要がある（対合性）．この位相の取り得る値は，$\mathcal{T}$ を 3 回繰り返せば

$$\mathrm{e}^{i\alpha}\mathcal{T} = \mathcal{T}^3 = \mathcal{T}\mathrm{e}^{i\alpha} = \mathrm{e}^{-i\alpha}\mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{i\alpha} = \pm 1$$

となるため，次の分類が成り立つ．

分類 1（ダイソンの三道[4]） エルミート演算子 H は，対合的な反ユニタリー変換 $\mathcal{T}$ に対して下の 3 通りのいずれかを満たす：

$$[H, \mathcal{T}] \begin{cases} \neq 0 \\ = 0, \quad \mathcal{T}^2 = \pm I. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2 エルミート行列の分類

前節の分類法は純粋に代数的であり，H や $\mathcal{T}$ が物理的にハミルトニアンや時間反転変換を表す必要はない．また，対合的対称性という代数的観点からは，分類 1 における交換子 [,] を反交換子 { , } に，あるいは反ユニタリーをユニタリーに置き換えた場合も等しく考え得る[26]．ただし，

① 「ユニタリー変換と可換」という条件 $[H, \Omega] = 0$ は Ω の ± 1 の固有空間ごとに H を直和分解するだけであるから，実質的な分類は「反ユニタリー変換と可換」「反ユニタリー変換と反可換」「ユニタリー変換と反可換」の 3 通りである．これらの変換をそれぞれ $\mathcal{T}, \mathcal{C}, \mathcal{P}$ と記す．

② この内の 2 つの対称性をもつ行列は自動的に 3 つ目をもつので（反ユニタリーな $\mathcal{T}$ と交換し $\mathcal{C}$ と反交換する行列はユニタリーな $\mathcal{P} \equiv \mathcal{T}\mathcal{C}$ と反交換する），もち得る対称性の数は 0, 1, 3 である．

③ 反ユニタリー変換の 2 乗 $\mathcal{T}^2$ の位相は再定義 $\mathcal{T} \to \mathrm{e}^{i\beta}\mathcal{T}$ の下で不変であり，この自由度を利用して $\mathcal{T}, \mathcal{C}, \mathcal{P}$ を互いに可換にすることができる．

④ ユニタリー変換の 2 乗 $\mathcal{P}^2$ の位相は $\mathcal{P} \to e^{i\gamma}\mathcal{P}$ によって任意に変化させられるので，慣習上 $\mathcal{P}^2 = +I$ または $(\mathcal{TCP})^2 = +I$ となるように選ぶ.

以上より，ヒルベルト空間が有限次元であると仮定すると，

分類 2（ツィルンバウアーの十道[27]） エルミート行列 H は，対合的な反ユニタリー変換 $\mathcal{T}, \mathcal{C}$，およびユニタリー変換 $\mathcal{P}$ に対して，(2.2) および

$$\{H, \mathcal{C}\} \begin{cases} \neq 0 \\ = 0, \quad \mathcal{C}^2 = \pm I \end{cases}, \quad \{H, \mathcal{P}\} \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

に応じて表 2.1 の 10 通りに細分類される：

表 2.1 対合的対称性によるエルミート行列の分類.

$\mathcal{T}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{P}$	行列の属性	対称空間・クラス		β
			$H : \mathbb{C}$-エルミート	$\mathrm{U}(N)$	A	2
$+$			$H : \mathbb{R}$-対称	$\mathrm{U}(N)/\mathrm{O}(N)$	AI	1
$-$			$H : \mathbb{H}$-自己双対	$\mathrm{U}(2N)/\mathrm{Sp}(2N)$	AII	4
	$+$		$Z : \mathbb{C}$-歪対称	$\mathrm{O}(N)$	BD	2
	$-$		$Z : \mathbb{C}$-対称	$\mathrm{Sp}(2N)$	C	2
		$+$	$Z : \mathbb{C}^{N'\times N}, \quad W = 0$	$\mathrm{U}(N'+N)/\mathrm{U}(N')\times\mathrm{U}(N)$	AIII	2
$+$	$+$	$+$	$Z : \mathbb{R}^{N'\times N}, \quad W = 0$	$\mathrm{O}(N'+N)/\mathrm{O}(N')\times\mathrm{O}(N)$	BDI	1
$-$	$-$	$+$	$Z : \mathbb{H}^{N'\times N}, \quad W = 0$	$\mathrm{Sp}(2(N'+N))/\mathrm{Sp}(2N')\times\mathrm{Sp}(2N)$	CII	4
$-$	$+$	$-$	$Z : \mathbb{C}$-歪対称	$\mathrm{O}(2N)/\mathrm{U}(N)$	DIII	1
$+$	$-$	$-$	$Z : \mathbb{C}$-対称	$\mathrm{Sp}(2N)/\mathrm{U}(N)$	CI	4

この分類表の要素は次の通りである．まず第 1 列の符号 $\pm$ は，2 乗が ± 1 となる $\mathcal{T}, \mathcal{C}, \mathcal{P}$ と（反）交換することを表し，空欄はその対称性を有しないことを表す．第 2 列にはハミルトニアン演算子の行列表示 H，あるいはそのブロック表示

$$H = \begin{pmatrix} W & Z \\ Z^\dagger & -W^T \end{pmatrix}, \quad W = W^\dagger$$

におけるそれぞれの要素の属性を記した．第 3,4 列は，そのエルミート行列 H の線形空間を接空間とするリーマン対称空間とそのカルタン分類記号を表す．例えば，A 型の対称空間である $\mathrm{U}(N)$ 群の接空間は $N\times N$ 複素エルミート行列，AIII 型の対称空間である複素グラスマン多様体 $\mathrm{U}(N'+N)/\mathrm{U}(N')\times\mathrm{U}(N)$ の接空間は $N'\times N$ 複素行列とそのエルミート共役を非対角にのみもつ $(N'+N)\times(N'+N)$ 複素エルミート行列，などである．第 5 列の**ダイソン指数** β は H の非対角要素がもつ実成分の数を表す.

[証明] 一例としてクラス AI の表現行列は，$\mathcal{T}^2 = K\Omega K\Omega = \Omega^*\Omega = +I$ となる $\mathcal{T}$ と交換する．$\Omega^*\Omega = I$ は Ω が対称ユニタリー行列であることを意味

し，対称ユニタリー行列は別のユニタリー行列を用いて $\Omega = U^T U$ と表せる．$\mathcal{V}$ の基底を $\{U^\dagger|i\rangle\}$ と選び直せば $\Omega = I$ となり，このとき $\mathcal{T} = K$（複素共役）と交換する H の要素は実数に制限されるため第 2 行が従う．

同様にクラス AII の場合，$\Omega^*\Omega = -I$ は Ω が歪対称ユニタリー行列であることを意味し，歪対称ユニタリー行列は別のユニタリー行列と歪対称行列 $J = \mathrm{diag}\,(i\sigma_2, \ldots, i\sigma_2)$ を用いて $\Omega = U^T J U$ と表せる．$\mathcal{V}$ の基底を選び直せば $\Omega = J$ となり，このとき条件 $[H, KJ] = 0$ すなわち $JH^*J^{-1} = H$ は，H を 2×2 ブロックに分割したときの要素行列 H_{ij} について $\sigma_2 H_{ij}^* \sigma_2 = H_{ij}$ を課す（σ_k はパウリ行列を表す）．このような 2×2 行列は $\{I, i\sigma_3, i\sigma_2, i\sigma_1\}$ の実線形結合である．これら 4 つの行列は 4 元数体 $\mathbb{H}$ の基本単位 $\{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ の複素行列表示に他ならない．本書で用いる 4 元数および 4 元数行列の諸性質を付録 A に収録したので参照されたい．4 元数の双対を $\bar{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{1}$, $\bar{\boldsymbol{i}} = -\boldsymbol{i}$, $\bar{\boldsymbol{j}} = -\boldsymbol{j}$, $\bar{\boldsymbol{k}} = -\boldsymbol{k}$, 4 元数行列 H の双対を $H^D = \bar{H}^T$ と定義すると，実 4 元数行列 H の自己双対性 $H^D = H$ が複素行列としてのエルミート性を意味するから第 3 行が従う．

クラス AIII の場合，$\mathcal{P}^2 = 1$ を用いて $\mathcal{V}$ を固有値 $+1$ と -1 の部分空間（それぞれ N', N 次元とする）に分けて基底変換により $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I_{N'} & 0 \\ 0 & -I_N \end{pmatrix}$ と対角化すると，これと反交換する複素エルミート行列という条件から

$$H = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad Z \in \mathbb{C}^{N' \times N} \tag{2.4}$$

となり第 6 行が従う．その他のクラスについても，例えば $\mathcal{C}^2 = -I$ となる $\mathcal{C}$ をあらわに行列表示するなどして，中欄の $\mathcal{TCP}$ 対称性を有するハミルトニアン行列が右欄の性質をもつことを簡単に確認できる．□

$\mathcal{C}$ または $\mathcal{P}$ 対称性をもつクラス（A, AI, AII 以外）の行列は反交換性 $\mathcal{C}^{-1} H \mathcal{C} = -H^T$ または $\mathcal{P}^{-1} H \mathcal{P} = -H$ のために非零の固有値が正負の対をなす．**カイラル型**と呼ばれるこれらのクラスには，ゲージ群の種々の表現に付随するディラック演算子 (AIII, BDI, CII)，および超伝導–常伝導接合におけるボゴリウボフ–ドゥジャン ハミルトニアン (BD, C, DIII, CI) などの重要な物理例が知られている．次節では A, AI, AII 型，次々節では本書後半の主題である AIII, BDI, CII 型を取り上げる．

2.3 固有値分布関数

ランダム行列理論では，前節で分類したエルミート行列の各々の族を確率集団と考える．本節ではまず，非カイラルなクラス A, AI, AII に属する H の固有値の確率分布を導出する．

$N \times N$ 実対称 (AI)，複素エルミート (A)，実 4 元数自己随伴 (AII) 行列

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \cdots & H_{NN} \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

$$H_{ij} = \begin{cases} H_{ij}^{(0)} & \in \mathbb{R} \quad \text{(AI)} \\ H_{ij}^{(0)} + H_{ij}^{(1)} i & \in \mathbb{C} \quad \text{(A)} \\ H_{ij}^{(0)}\mathbf{1} + H_{ij}^{(1)}\boldsymbol{i} + H_{ij}^{(2)}\boldsymbol{j} + H_{ij}^{(3)}\boldsymbol{k} & \in \mathbb{H} \quad \text{(AII)} \end{cases}$$

を考える[*1]．各実数成分は（反）対称性 $H_{ij}^{(0)} = H_{ji}^{(0)}$，$H_{ij}^{(1,2,3)} = -H_{ji}^{(1,2,3)}$ を満たす．非対角の行列要素がもつ実自由度をダイソン指数と呼び，$\beta = 1, 2, 4$ と記す．H の微分 1 形式

$$dH = \begin{bmatrix} dH_{11} & dH_{12} & \cdots & dH_{1N} \\ dH_{21} & dH_{22} & \cdots & dH_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ dH_{N1} & dH_{N2} & \cdots & dH_{NN} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

に随伴する符号付き体積要素（体積形式）(dH) は，dH 中の独立した実要素 $N + \beta N(N-1)/2$ 個の外積である：

$$(dH) := \bigwedge_{i=1}^{N} dH_{ii}^{(0)} \bigwedge_{k>j}^{N} dH_{jk}^{(0)} \wedge \cdots \wedge dH_{jk}^{(\beta-1)}. \tag{2.7}$$

上の H は，直交群 $\mathrm{O}(N)$ (AI), ユニタリー群 $\mathrm{U}(N)$ (A), またはユニタリーシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(N)$ (AII) の元 U の随伴作用によって対角行列 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$，$\lambda_i \in \mathbb{R}$ に変換される：

$$H = U \Lambda U^{\dagger}. \tag{2.8}$$

行列 U を

$$U = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \cdots \vec{u}_N] \tag{2.9}$$

と表示したとき，i 番目の行 $\vec{u}_i$ は固有値 λ_i に随伴した正規固有ベクトルとなる．なお AII の場合，Λ の対角成分 λ_i は 4 元数としての $\lambda_i \mathbf{1} + 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$（スカラー 4 元数と呼ばれる）を意味するから，$2 \times 2$ ブロックの複素行列表示 $\mathbf{1} \mapsto I$ を用いた場合，各固有値は 2 重に縮退することになる（クラマース縮退）．

---

*1） 時間発展生成子 H および実 4 元数体 $\mathbb{H}$ の文字は，ともに解析力学と 4 元数の共通の創始者ハミルトン (W.R. Hamilton, 1805–1865) にちなむ．

固有値と固有ベクトルへの分解 (2.8) に対して，H の体積要素について以下の定理が成り立つ：

定理 2.1（ヤコビアン） 符号付き体積要素 (dH) は Λ と U の体積要素により，

$$(dH) = \bigwedge_{i=1}^{N} d\lambda_i \prod_{j>k}^{N} (\lambda_j - \lambda_k)^{\beta} (\delta U), \quad (\delta U) := \bigwedge_{j>i}^{N} \delta u_{ij}, \quad \delta u_{ij} := \vec{u}_i^{\dagger} \cdot d\vec{u}_j \tag{2.10}$$

と表される．

[証明] 例として $\beta = 2$ の場合を考える．(2.8) の微分をとると

$$dH = dU\Lambda U^{\dagger} + Ud\Lambda U^{\dagger} + U\Lambda dU^{\dagger}.$$

$U^{\dagger}$ と U を左右から掛けると

$$U^{\dagger}dHU = d\Lambda + U^{\dagger}dU\Lambda - \Lambda U^{\dagger}dU \tag{2.11}$$

$$= \begin{bmatrix} d\lambda_1 & (\lambda_2-\lambda_1)\delta u_{12} & \cdots & (\lambda_N-\lambda_1)\delta u_{1N} \\ (\lambda_2-\lambda_1)\delta u_{12}^* & d\lambda_2 & \cdots & (\lambda_N-\lambda_2)\delta u_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_N-\lambda_1)\delta u_{1N}^* & (\lambda_N-\lambda_2)\delta u_{2N}^* & \cdots & d\lambda_N \end{bmatrix}.$$

ここで表示 (2.9)，等式 $dI = d(U^{\dagger}U) = dU^{\dagger}U + U^{\dagger}dU = 0$，およびその成分表示 $\delta u_{ji}^* + \delta u_{ij} = 0$ を用いた．上の行列の対角要素および上半三角要素から定義 (2.7) を用いると，

$$(U^{\dagger}dHU) = \bigwedge_{i=1}^{N} d\lambda_i \prod_{j>k}^{N} (\lambda_j - \lambda_k)^2 (\delta U). \tag{2.12}$$

ここで，上半三角要素中の $\vec{u}_j^{\dagger} d\vec{u}_k$ が $\beta = 2$ 個の実成分をもつために $(\lambda_j - \lambda_k)^2$ が生じることに注意しておく．次に以下の補題を示す．

補題 2.1 非特異な複素行列 A に対して

$$(A\,dH) = (dH\,A) = (\det A)^N (dH). \tag{2.13}$$

[証明] $(A\,dH)$ は構成上，A の要素の多項式 $p(A)$ と (dH) の積になる．$(AB\,dH)$ の合成則から従う $p(A)p(B) = p(AB)$ を満たす行列要素の多項式 $p(A)$ は $\det A$ の自然数冪 $(\det A)^c$ のみである．$A = aI$ のとき (dH) の定義 (2.7) より $p(A) = a^{N^2} = (\det A)^N$ であることから $c = N$．また (2.7) から $(dH) = (dH^T)$ だから $(dH\,A) = (A^T dH^T) = p(A^T)(dH^T) = (\det A)^N (dH)$．□

この補題からユニタリー行列 U に対して

$$(U^\dagger dH\, U) = (\det U^\dagger \det U)^N (dH) = (\det U^\dagger U)^N (dH) = (dH) \quad (2.14)$$

が従うから，(2.12) より $\beta = 2$ とおいた場合の定理が示された．$\beta = 1$ および 4 の場合は，(2.11) に対応する式の上半三角要素が 1 個または 4 個の実成分をもつことから同様に成立する．□

ランダム行列理論では確率変数としての H を考えるため，その確率測度には符号付き体積要素ではなく符号無しの $|(dH)|$ が必要となる．以下では煩雑を避けるため，これを単に (dH) と表記することとする．定理 2.1 から，固有ベクトルの確率密度 $(U^\dagger dU)$ が固有値部分と分離するため，以下の定理が直ちに従う．

定理 2.2（固有値分布関数） $V(H)$ を $\mathcal{Z} := \int (dH)\, \mathrm{e}^{-\operatorname{tr} V(H)} < \infty$ となる実関数とする．H を確率測度

$$\mathcal{Z}^{-1}(dH)\, \mathrm{e}^{-\operatorname{tr} V(H)} \quad (2.15)$$

に従って分布する行列値確率変数とすると，H の固有値 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ の連結確率測度は

$$P_\beta(\{\lambda\}) \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i, \quad P_\beta(\{\lambda\}) := \mathcal{Z}^{-1} \prod_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)} \prod_{j>k}^{N} |\lambda_j - \lambda_k|^\beta. \quad (2.16)$$

ここで規格化定数（分配関数）は

$$\mathcal{Z} := \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i\ \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)} \prod_{j>k}^{N} |\lambda_j - \lambda_k|^\beta \quad (2.17)$$

で定義されるが，以下で固有値相関関数などを計算する際にはこの量を具体的に計算する必要はない．

2.4 固有値分布関数：カイラル型

本節ではカイラルなクラス BDI, AIII, CII に属する H の固有値の確率分布を導出する．H のブロック表示 (2.4) 中の非対角部分に配置された $N' \times N$ 実 (BDI), 複素 (AIII), 実 4 元数 (CII) 行列

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N'1} & Z_{N'2} & \cdots & Z_{N'N} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

$$Z_{ij} = \begin{cases} Z_{ij}^{(0)} & \in \mathbb{R} \quad \text{(BDI)} \\ Z_{ij}^{(0)} + Z_{ij}^{(1)} i & \in \mathbb{C} \quad \text{(AIII)} \\ Z_{ij}^{(0)}\mathbf{1} + Z_{ij}^{(1)}\boldsymbol{i} + Z_{ij}^{(2)}\boldsymbol{j} + Z_{ij}^{(3)}\boldsymbol{k} & \in \mathbb{H} \quad \text{(CII)} \end{cases}$$

を考える．Z の微分 1 形式

$$dZ = \begin{bmatrix} dZ_{11} & dZ_{12} & \cdots & dZ_{1N} \\ dZ_{21} & dZ_{22} & \cdots & dZ_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ dZ_{N'1} & dZ_{N'2} & \cdots & dZ_{N'N} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

に随伴する符号付き体積要素 (dZ) は，dZ 中の独立した実要素 $\beta N'N$ 個の外積である：

$$(dZ) := \bigwedge_{j=1}^{N'} \bigwedge_{k=1}^{N} dZ_{jk}^{(0)} \wedge \cdots \wedge dZ_{jk}^{(\beta-1)}. \tag{2.20}$$

以下では一般性を失わずに $N'-N =: \nu \geq 0$ とする．上の Z は, $\mathrm{O}(N')\times\mathrm{O}(N)$ (BDI), $\mathrm{U}(N')\times\mathrm{U}(N)$ (AII), または $\mathrm{Sp}(N')\times\mathrm{Sp}(N)$ (CII) の元 (U, V) の双線形作用によって特異値行列に変換される：

$$\begin{aligned} &Z = U\Lambda V^{\dagger}, \\ &\Lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_N) \\ \mathbf{0}_{\nu\times N} \end{pmatrix}, \ z_i \geq 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

特異値分解 (2.21) に対して，Z の体積要素に関する以下の定理が成り立つ：

定理 2.3（**ヤコビアン：カイラル型**） 符号付き体積要素 (dZ) は Λ, U, V の体積要素により，

$$(dZ) = \bigwedge_{i=1}^{N} dz_i \, z_i^{\beta\nu+\beta-1} \prod_{j>k}^{N} (z_j^2 - z_k^2)^{\beta} \, (\delta U)(\delta V) \tag{2.22}$$

と表される．

[証明] まず $\beta = 1$ の場合を考える．このとき特異値分解 (2.21) において U, V はそれぞれ直交群 $\mathrm{O}(N')$, $\mathrm{O}(N)$ の元であり，$Z = U\Lambda V^T$ となる．ただし U には $U \sim U \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, $u \in \mathrm{O}(\nu)$ の不定性があるので，U の体積要素は (2.10) とは異なり，$\mathrm{O}(\nu)$ 分の $\nu(\nu-1)/2$ 次元低い

$$(\delta U) := \bigwedge_{j>i}^{N} \delta u_{ij} \bigwedge_{k=1}^{N} \bigwedge_{\ell=1}^{\nu} \delta u_{k,N+\ell} \tag{2.23}$$

と定義される．(2.21) の微分をとると

$$dZ = dU\Lambda V^T + Ud\Lambda V^T + U\Lambda dV^T.$$

U^T と V を左右から掛けると

$$U^T dZ V = d\Lambda + U^T dU \Lambda - \Lambda V^T dV =$$

$$\left[\begin{array}{cccc} dz_1 & z_2\delta u_{12} - z_1\delta v_{12} & \cdots & z_N\delta u_{1N} - z_1\delta v_{1N} \\ -z_1\delta u_{12} + z_2\delta v_{12} & dz_2 & \cdots & z_N\delta u_{2N} - z_2\delta v_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -z_1\delta u_{1N} + z_N\delta v_{1N} & -z_2\delta u_{2N} + z_N\delta v_{2N} & \cdots & dz_N \\ \hline -z_1\delta u_{1,N+1} & -z_2\delta u_{2,N+1} & \cdots & -z_N\delta u_{N,N+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -z_1\delta u_{1,N+\nu} & -z_2\delta u_{2,N+\nu} & \cdots & -z_N\delta u_{N,N+\nu} \end{array}\right]. \tag{2.24}$$

ここで表示 (2.9)，および $U^T dU$ と $V^T dV$ が実反対称行列であり対角成分をもたないことを用いた．補題 2.1 と同様にして

$$(U^T dZV) = (\det U)^N (\det V)^{N'} (dZ) = (dZ)$$

である．上の行列の上部分の対角要素から $\bigwedge_{i=1}^N dz_i$ が得られる．また，上部分の非対角要素の (k, j) 成分と (j, k) 成分の外積

$$(z_j\delta u_{kj} - z_k\delta v_{kj}) \wedge (-z_k\delta u_{kj} + z_j\delta v_{kj}) = (z_j^2 - z_k^2)\delta u_{kj} \wedge \delta v_{kj}$$

から因子 $\prod_{j>k}^N (z_j^2 - z_k^2)$，$(V^T dV)$，および (2.23) の左部分が得られる．さらに下部分から因子 $\prod_{i=1}^N z_i^\nu$ および (2.23) の右部分が得られる．

次に $\beta = 2, 4$ の場合を考える．このとき，$U^\dagger dU$ と $V^\dagger dV$ は反対称な実部に加えて，対称な虚部（i または $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の項）と合わせて計 $2, 4$ 個の実成分をもつ．このため，非対角部分に由来する因子 $\prod_{j>k}^N (z_j^2 - z_k^2)$ および $\prod_{i=1}^N z_i^\nu$ は 2 乗ないし 4 乗される．また，(2.24) 上部の対角部分には

$$z_i\delta u_{ii} - z_i\delta v_{ii} \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.25}$$

の虚部として $2N\times$ (1 ないし 3) 個の実自由度が加わる（実部は元々 0）．U, V には

$$U \sim U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix},\ V \sim VD,\ u \in \mathrm{U}(\nu) \text{ または } \mathrm{Sp}(2\nu),$$

$$D = \mathrm{diag}\,(\eta_1, \ldots, \eta_N),\ \eta_i \in \mathrm{U}(1) \text{ または } \mathrm{Sp}(2)$$

の不定性があるが，D は N ないし $3N$ 個の実自由度をもつので，これを用いて常に (2.25) 中の δu_{ii} を 0 ととることができる．従って (2.24) 上部の対角部分からは体積要素

$$\bigwedge_{i=1}^N dz_i\, z_i^1 \wedge \delta u_{ii} \quad \text{ないし} \quad \bigwedge_{i=1}^N dz_i\, z_i^3 \wedge \delta u_{ii}$$

が生じる．この因子と上述の $z_i^{\beta\nu}$ を合わせて $z_i^{\beta-1+\beta\nu}$ となり定理が成立す

る．□

複素行列 Z の特異値（H の非零固有値の絶対値）z_i からウィシャート型行列 $Z^\dagger Z$ の固有値 $\lambda_i = z_i^2$ へと変数変換することにより，以下の定理が得られる．

定理 2.4（固有値分布関数：カイラル型） $v(\lambda)$ を $\int (dZ)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,v(Z^\dagger Z)} < \infty$ となる実関数とする．$H = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^\dagger & 0 \end{pmatrix}$ 中の Z を確率測度

$$\mathcal{Z}^{-1}(dH)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,v(H^2)/2} = \mathcal{Z}^{-1}(dZ)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,v(Z^\dagger Z)} \tag{2.26}$$

に従って分布する行列値確率変数とすると，$Z^\dagger Z$ の固有値 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N \geq 0\}$ の連結確率測度は

$$P_\beta(\{\lambda\}) \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i,\ \ P_\beta(\{\lambda\}) := \mathcal{Z}^{-1} \prod_{i=1}^{N} \Big(\mathrm{e}^{-v(\lambda_i)}\,\lambda_i^{\beta(\nu+1)/2-1} \Big) \prod_{j>k}^{N} |\lambda_j - \lambda_k|^\beta. \tag{2.27}$$

ここで規格化定数は

$$\mathcal{Z} := \int_0^\infty \prod_{i=1}^{N} \Big(d\lambda_i\,\mathrm{e}^{-v(\lambda_i)}\,\lambda_i^{\beta(\nu+1)/2-1} \Big) \prod_{j>k}^{N} |\lambda_j - \lambda_k|^\beta \tag{2.28}$$

で定義される．

(2.27) を (2.16) と比較すると，カイラル型ランダム行列の固有値分布関数は，同じダイソン指数 β をもつ非カイラル型においてポテンシャルを

$$V(\lambda) = \begin{cases} v(\lambda) - \left(\beta\frac{\nu+1}{2} - 1\right)\log\lambda & (\lambda > 0) \\ \infty & (\lambda \leq 0) \end{cases} \tag{2.29}$$

ととったものに他ならない．このため次節以下の固有値の相関関数などについては，非カイラル型のみで統一的に扱うことができる．

2.5 固有値の相関関数・個別分布

複素エルミート行列 H 上の確率測度 (2.15) は，ユニタリー変換 $H \mapsto U^\dagger H U$ に対して (dH) 部分と $\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,V(H)}$ 部分がそれぞれ不変であるため，H はユニタリー不変集団，あるいは略してユニタリー集団 (unitary ensemble, UE) に属すると呼ばれる．同様の理由で，確率測度 (2.15) をもつ実対称および 4 元数自己随伴行列は直交集団 (orthogonal ensemble, OE) およびシンプレクティック集団 (symplectic ensemble, SE) に属すると呼ばれる．ランダム行列の最大の利点は固有値分布関数 (2.16) から，有限サイズ $N < \infty$・熱力学極限 $N \to \infty$ のいずれにおいても固有値の種々の統計量を解析的に導出できることにある．その代表的な 2 例は，

- 固有値相関関数．k 個の微小区間 $(\lambda_1, \lambda_1 + d\lambda_1) \otimes \cdots \otimes (\lambda_k, \lambda_k + d\lambda_k)$ の各々の中に一つずつ固有値を見いだす確率を $R_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) d\lambda_1 \cdots d\lambda_k$ と定義すると，

$$R_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \frac{N!}{(N-k)!} \int_{\mathbb{R}} d\lambda_{k+1} \cdots d\lambda_N \, P(\{\lambda\}). \tag{2.30}$$

特に $R_1(\lambda) =: \rho(\lambda)$ は固有値密度である．

- ギャップ確率．区間 $I = (a, b)$（あるいは区間の和集合 $\bigcup_\ell (a_\ell,\ b_\ell)$）中に正確に k 個の固有値を見いだす確率を $E_k(I)$ と定義すると，

$$E_k(I) = \binom{N}{k} \int_I d\lambda_1 \cdots d\lambda_k \int_{\mathbb{R} \setminus I} d\lambda_{k+1} \cdots d\lambda_N \, P(\{\lambda\}). \tag{2.31}$$

これらの 2 種の統計量の組はもちろん独立ではない．これを見るために，パラメータ ξ を含む次の関数 τ を定義する*2)：

$$\tau(\xi; I) := \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i (1 - \xi \chi_I(\lambda_i)) \, P(\{\lambda\}). \tag{2.32}$$

ここで，$\chi_I(\lambda)$ は区間 I の特性関数（$\lambda \in I$ のとき 1, $\lambda \notin I$ のとき 0）を表す．$\tau(\xi; I)$ の被積分関数を $-\xi$ について k 回微分してから $\xi = 0$ または $\xi = 1$ とおくことを考えよう．このとき $(1 - \xi \chi_I(\lambda_i))$ の形の因子のうち微分される k 個が $\chi_I(\lambda_i)$ に置き換わり，残りの $N - k$ 個の因子は 1 または $1 - \chi_I(\lambda_j) = \chi_{\mathbb{R} \setminus I}(\lambda_j)$ に変わる．これを定義 (2.30), (2.31) と比較すると，$\tau_N(\xi; I)$ は $\xi = 0$ および $\xi = 1$ の周りで以下のテイラー展開をもつことがわかる：

$$\tau(\xi; I) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-\xi)^k}{k!} \int_I d\lambda_1 \cdots d\lambda_k R_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \sum_{k=0}^{N} (1-\xi)^k E_k(I). \tag{2.33}$$

$\tau_N(\xi; I)$ が $\{R_k\}$ および $\{E_k\}$ に対する共通の母関数になっていることが両者の相互関係を示している．特に，$\xi = 1$ を代入した

$$E_0(I) = \int_{\mathbb{R} \setminus I} \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i \, P(\{\lambda\}) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \int_I d\lambda_1 \cdots d\lambda_k R_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \tag{2.34}$$

は全ての固有値が区間 I の外に分布する確率を表すから，I を固体電子のエネルギーギャップと見立てて狭義の**ギャップ確率**と呼ばれる．

特に $I = (\lambda, \infty)$ の場合を考える．$E_0(\lambda, \infty) - E_0(\lambda - d\lambda, \infty)$ は λ 以上の領域には固有値が分布せず，区間 $(\lambda - d\lambda, \lambda)$ には固有値が存在する確率を表す．区間が微小な場合はその中に固有値が 2 個以上含まれる確率は相対的に無

*2)　τ の文字は，この関数がパンルヴェ方程式に随伴する戸田格子階層の τ 関数になっていることに由来する[28]．

視できるから，

$$p_1^{(\max)}(\lambda) := \frac{d}{d\lambda}E_0(\lambda,\infty) = \lim_{d\lambda\to 0}\frac{E_0(\lambda,\infty)-E_0(\lambda-d\lambda,\infty)}{d\lambda} \quad (2.35)$$

で定義される $p_1^{(\max)}(\lambda)$ は最大固有値の確率密度である．同じことだが，ギャップ確率は最大固有値の累積分布

$$\int_{-\infty}^{\lambda} p_1^{(\max)}(\lambda')d\lambda' = E_0(\lambda,\infty)$$

である．(2.35) を敷衍すると（演習問題 2.3），k 番目に大きい固有値の確率密度 $p_k^{(\max)}(\lambda)$ は

$$p_k^{(\max)}(\lambda) - p_{k-1}^{(\max)}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}E_{k-1}(\lambda,\infty) \quad (2.36)$$

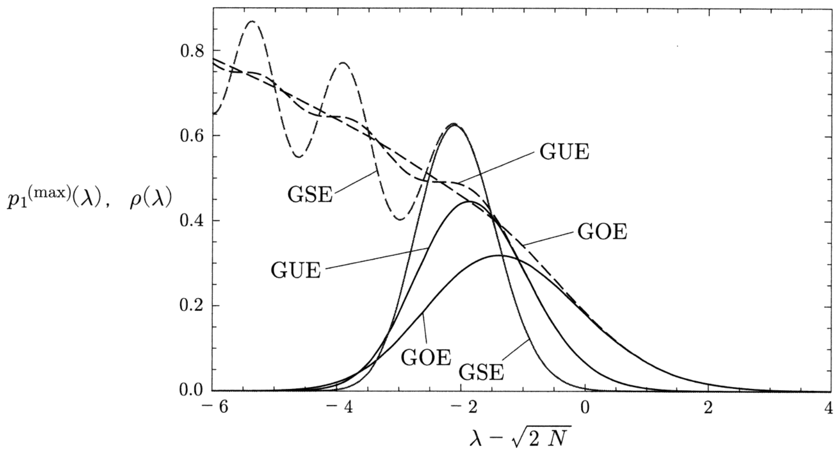


図 2.1　ガウス型アンサンブル ($\beta = 1, 2, 4$) の最大固有値分布 $p_1^{(\max)}(\lambda)$（実線）と対応する固有値密度 $\rho(\lambda)$（点線）．

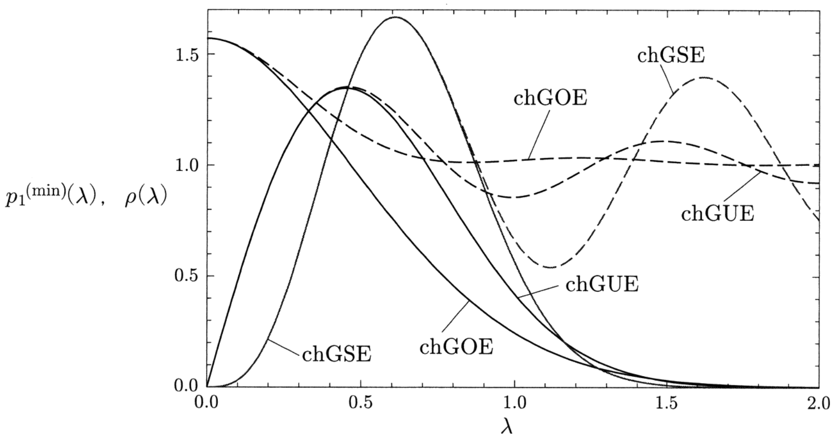


図 2.2　カイラルガウス型アンサンブル ($\beta = 1, 2, 4$) の最小固有値分布 $p_1^{(\min)}(\lambda)$（実線）と対応する固有値密度 $\rho(\lambda)$（点線）．

を満たすから，これらを総和して

$$p_k^{(\max)}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\sum_{j=0}^{k-1} E_j(\lambda, \infty) \tag{2.37}$$

が従う．また，後述のように正定値性または鏡像性（正負の固有値が対で現れる）をもつランダム行列集団を考える場合，$I = (0, \lambda)$ とすると上と同様にして，

$$p_k^{(\min)}(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda}\sum_{j=0}^{k-1} E_j(0, \lambda) \tag{2.38}$$

は（絶対値が）k 番目に小さい固有値の確率密度を与え，ギャップ確率は最小固有値の累積分布

$$\int_0^{\lambda} p_1^{(\min)}(\lambda')d\lambda' = 1 - E_0(0, \lambda)$$

を与える．(2.35) および (2.38) にギャップ確率の展開式 (2.34) を代入すると，最大および最小固有値分布に対する $\lambda \gg 1$ または $\lambda \ll 1$ での近似式

$$p_1^{(\max)}(\lambda) = R_1(\lambda) - \int_{\lambda}^{\infty} d\lambda' R_2(\lambda, \lambda') + \cdots \tag{2.39}$$

$$p_1^{(\min)}(\lambda) = R_1(\lambda) - \int_0^{\lambda} d\lambda' R_2(\lambda, \lambda') + \cdots \tag{2.40}$$

が得られる．図 2.1, 2.2 にはスケーリング極限における（カイラル）ガウス型集団の最大および最小固有値分布を図示する（導出については 4.8 節）．これらは $\lambda \gg 1$ および $\lambda \ll 1$ で固有値密度 $\rho(\lambda)$ に漸近することが確認できる．

演習問題

2.1 表 2.1 のうち，証明に挙げられていない「行列の属性」欄の行列の各々に対して，対応する $\mathcal{T}, \mathcal{C}, \mathcal{P}$ 演算子を構成せよ．

2.2 $N = 2, V(\lambda) = \lambda^2$ の場合（ガウス型集団）について，

i. 連結確率測度 (2.16) を $x = |\lambda_1 - \lambda_2|$ および $y = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ を用いて表せ．

ii. 規格化された準位間隔 $s := x/\langle x\rangle$ の確率分布関数 $p(s)$ がウィグナー予想式

$$p(s) = a_\beta s^\beta \exp(-b_\beta s^2), \quad a_\beta = \frac{2\Gamma\left(1+\beta/2\right)^{1+\beta}}{\Gamma\left((1+\beta)/2\right)^{2+\beta}}, \quad b_\beta = \frac{\Gamma\left(1+\beta/2\right)^2}{\Gamma\left((1+\beta)/2\right)^2}$$

で表されることを示せ．

2.3 $I = [\lambda, \infty)$ および $dI = [\lambda - d\lambda, \lambda)$ と定義し，区間 J の中に入る固有値の数を $n(J)$ と記す．定義式 $E_{k-1}(I) = \mathrm{Prob}\,(n(I) = k-1)$，および $d\lambda$ が微小なときに dI が 2 個以上の固有値を含む確率は無視できるため

$$E_{k-1}(I + dI) \simeq \mathrm{Prob}\,(n(dI) = 0 \cap n(I) = k-1) + \mathrm{Prob}\,(n(dI) = 1 \cap n(I) = k-2)$$

と近似されることを用いて (2.36) を示せ．

第 3 章

準位統計関数

ダイソン指数 $\beta = 2$ および $\beta = 4, 1$ をもつ不変ランダム行列集団の固有値は，直交多項式法および歪直交多項式法を用いることにより，それぞれ行列式点プロセスおよびパフィアン点プロセスに従う確率過程であることを示す．さらにこの事実から，各々の個別固有値分布がカーネルおよび 4 元数カーネルに対するフレドホルム行列式として表されることを見る．この解析的可解性こそがランダム行列理論を特徴付ける成果である*1)．

3.1　固有値相関関数：$\beta = 2$

本章では複素エルミート行列集団の固有値が，次の定理による行列式点プロセスに従う確率変数であることを示す．

定理 3.1（行列式点プロセス）　$\beta = 2$ をもつ確率密度 (2.16) に従う固有値 $\{\lambda\}$ の k 点相関関数は，

$$R_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \det[K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^{k} \tag{3.1}$$

と表される．ここでカーネルと呼ばれる 2 変数関数 $K(\lambda, \lambda') = K(\lambda', \lambda)$ は，重み $\mathrm{e}^{-V(\lambda)}$ のもとで直交する多項式系 $\{P_i(\lambda)\}_{i\in\mathbb{N}}$ とそのノルム $\{p_i\}$ から構成される正規直交関数系 $\{\psi_i(\lambda)\}_{i\in\mathbb{N}}$，

$$\psi_i(\lambda) := p_i^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-V(\lambda)/2}\,P_i(\lambda), \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\,\psi_i(\lambda)\psi_j(\lambda) = \delta_{ij} \tag{3.2}$$

を用いて

*1)　固有値相関関数が行列式点プロセスに従うのは確率測度 $(dH)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,V(H)}$ をもつユニタリー不変行列集団のみではなく，$(dH)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,V(H)+\mathrm{tr}\,AH}$（$A$：定数行列）をもつエルミート行列集団も該当する[29]．3.2 節の内容は対応するカーネルを用いて後者でも成立する．

$$K(\lambda,\lambda') := \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k(\lambda)\psi_k(\lambda') \tag{3.3}$$

と定義される．

この主定理の証明のため，以下の補題を示す．

補題 3.1（ファンデアモンド行列式） 定理 2.1 のヤコビアンに現れる差積は

$$\prod_{i>j}^{N}(\lambda_i - \lambda_j) = \det\left[\lambda_i^{j-1}\right]_{i,j=1}^{N} \tag{3.4}$$

と行列式形に表される．

[証明] 行列式の性質から右辺は 2 つの λ の交換に対して完全反対称な多項式なので，(λたちの対称多項式) $\times \prod_{i>j}^{N}(\lambda_i - \lambda_j)$ の形をしている．右辺は $\sum_{j=1}^{N}(j-1) = \frac{1}{2}N(N-1)$ 次の斉次式だが，$\prod_{i>j}^{N}(\lambda_i - \lambda_j)$ の次数も $\binom{N}{2} = \frac{1}{2}N(N-1)$ と等しいので，'対称多項式' は定数 C である．両辺の展開に現れる $\lambda_1^0\lambda_2^1\cdots\lambda_N^{N-1}$ の係数はともに 1 であるから，$C=1$．□

ファンデアモンド行列式の第 j 列 $[\lambda_i^{j-1}]_{i=1}^{N}$ に $(j-1)$ 番目までの列の定数倍を加えても値は変わらないから，行列要素を任意の $(j-1)$ 次のモニック多項式 $P_{j-1}(\lambda) = \lambda^{j-1} +$ (低次の項) で置き換えてよい：

$$\det\left[\lambda_i^{j-1}\right]_{i,j=1}^{N} = \det \mathbf{P}(\{\lambda\}), \quad \mathbf{P}(\{\lambda\}) := [P_{j-1}(\lambda_i)]_{i,j=1}^{N}. \tag{3.5}$$

このとき，連結確率密度の行列式部分は

$$\det \mathbf{P}(\{\lambda\})^2 = \det \mathbf{P}(\{\lambda\})\mathbf{P}(\{\lambda\})^T = \det\left[\sum_{k=0}^{N-1} P_k(\lambda_i)P_k(\lambda_j)\right]_{i,j=1}^{N} \tag{3.6}$$

となる．$\{P_i(\lambda)\}_{i\in\mathbb{N}}$ は任意だからこれらを重み $\mathrm{e}^{-V(\lambda)}$ で直交する多項式系

$$(P_i, P_j) := \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \mathrm{e}^{-V(\lambda)}\, P_i(\lambda)P_j(\lambda) = p_i\delta_{ij} \tag{3.7}$$

に選び，重みを含めた正規直交関数系 (3.2) を導入すると，連結確率密度 (2.16) は (3.3) を用いて

$$P_{\beta=2}(\{\lambda\}) = Z^{-1}\prod_{k=0}^{N-1} p_k \cdot \det[K(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^{N} \tag{3.8}$$

と表されることになる．次の補題は $\{\psi_i(\lambda)\}_{i\in\mathbb{N}}$ の正規直交性から直ちに従う：

補題 3.2（射影性） カーネル $K(\lambda,\lambda')$ は次式を満たす：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda'\, K(\lambda,\lambda')K(\lambda',\lambda'') = K(\lambda,\lambda''). \tag{3.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, K(\lambda,\lambda) = N. \tag{3.10}$$

なお $K(\lambda,\lambda')$ を核とする積分演算子を

$$\hat{K} : f(\lambda) \mapsto (\hat{K}\circ f)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda'\, K(\lambda,\lambda') f(\lambda')$$

と定義すると，上式は

$$\hat{K}\circ\hat{K} = \hat{K}, \quad \mathrm{Tr}\,\hat{K} = N$$

と書ける．ここで，Tr は $\mathbb{R}$ 上の 2 乗可積分関数の空間 $L^2(\mathbb{R})$ 上のトレースを表す．上 2 式は，構成から演算子 $\hat{K}$ が $L^2(\mathbb{R})$ 中，$\{\psi_i(\lambda)\}_{i=0}^{N-1}$ で張られる N 次元部分空間への射影演算子であることを示している．

補題 3.3 $\det[K(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^{p}$ は次の漸化式を満たす：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_p \det[K(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^{p} = (N-p+1)\det[K(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^{p-1}. \tag{3.11}$$

[証明] 被積分関数の行列式は定義から

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) K(\lambda_1,\lambda_{\sigma(1)})K(\lambda_2,\lambda_{\sigma(2)})\cdots K(\lambda_p,\lambda_{\sigma(p)})\\ &= \sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \underbrace{K(\lambda_i,\lambda_j)\cdots K(\lambda_k,\lambda_i)}_{\text{ループ}}\cdots \underbrace{K(\lambda_l,\lambda_m)\cdots K(\lambda_n,\lambda_l)}_{\text{ループ}}\end{aligned} \tag{3.12}$$

である．上式の対称群 S_p に渉る和のなかで，(ア) $\sigma(p)=p$，(イ) $\sigma(p)\neq p$ の 2 種類に分けて考える．(ア) に該当する場合，実質的に $\sigma\in S_{p-1}$ であるから λ_p を含まない部分はまとめて $\det[K(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^{p-1}$ を与え，λ_p 積分から (3.10) により因子 N がかかる．(イ) の場合，λ_p 積分は (3.9) のために，(3.12) 式のうち λ_p を含むループの長さを一つ減らす．ループ短絡後の置換 σ の符号は元と逆であり，短絡されたループ集合の中に λ_p を挿入する場合の数は $(p-1)$ 通りあるから，これらの項は λ_p 積分後にまとめて $-(p-1)\det[K(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^{p-1}$ を与える．(ア), (イ) を足して (3.11) を得る．□

上の補題を繰り返して用いることにより，次式が得られる：

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_{k+1}\cdots d\lambda_N \det[K(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^{N}\\ &= (N-k)!\det[K(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^{k}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

上式の $k=0$ の場合の右辺が $N!$ であることと，確率密度 (3.8) の規格化

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1\cdots d\lambda_N P(\{\lambda\}) = Z^{-1}\prod_{k=0}^{N-1} p_k \cdot N! \tag{3.14}$$

から，分配関数は直交多項式のノルムにより

$$Z = N! \prod_{k=0}^{N-1} p_k$$

と表される．これを用いて，確率密度 (3.8) はより便利な形

$$P(\{\lambda\}) = \frac{1}{N!} \det[K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^{N} \tag{3.15}$$

に書くことができる．定義 (2.30)，(3.13)，および (3.15) より，固有値の k 点相関関数について (3.1) が成立する．□

3.2 フレドホルム行列式：$\beta = 2$

行列式点プロセスに従う固有値相関関数 (3.1) の具体形は行列式を展開して

$$\begin{aligned}
&R_1(\lambda) = K(\lambda, \lambda) := \rho(\lambda) \ (\text{固有値密度}),\\
&R_2(\lambda_1, \lambda_2) = K(\lambda_1, \lambda_1)K(\lambda_2, \lambda_2) - K(\lambda_1, \lambda_2)^2,\\
&R_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = K(\lambda_1, \lambda_1)K(\lambda_2, \lambda_2)K(\lambda_3, \lambda_3)\\
&-K(\lambda_1, \lambda_1)K(\lambda_2, \lambda_3)^2 - K(\lambda_2, \lambda_2)K(\lambda_3, \lambda_1)^2 - K(\lambda_3, \lambda_3)K(\lambda_1, \lambda_2)^2\\
&+2K(\lambda_1, \lambda_2)K(\lambda_2, \lambda_3)K(\lambda_3, \lambda_1),
\end{aligned}$$

などとなる．各 R_k 中の最後の項以外は固有値 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ が 2 つ以上の低次の相関関数の積に分離している非連結成分である．また最後の項は，k 個の固有値がカーネルによって単一のループに繋がっている連結成分 (connected part) であり，k 点クラスター関数ないしキュミュラントとも呼ばれる：

$$\begin{aligned}
&R_k^{(\mathrm{conn})}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = (-1)^{k-1} \times\\
&\sum_{\sigma \in S_{k-1}} K(\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)})K(\lambda_{\sigma(2)}, \lambda_{\sigma(3)}) \cdots K(\lambda_{\sigma(k-1)}, \lambda_k)K(\lambda_k, \lambda_{\sigma(1)}).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

これらのクラスター関数の，区間 $I^{\otimes k}$ 上での積分に対する母関数 $F(\xi; I)$ は，

$$\begin{aligned}
F(\xi; I) &:= \sum_{k=1}^{N} \frac{(-\xi)^k}{k!} \int_I d\lambda_1 \cdots d\lambda_k \, R^{(\mathrm{conn})}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\\
&= -\sum_{k=1}^{N} \frac{\xi^k}{k} \int_I d\lambda_1 \cdots d\lambda_k \, K(\lambda_1, \lambda_2) \cdots K(\lambda_k, \lambda_1)\\
&= -\sum_{k=1}^{N} \frac{\xi^k}{k} \mathrm{Tr}\,(\hat{K}|_I)^k = \mathrm{Tr}\log(\mathbb{I} - \xi \hat{K}|_I)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

となる．ここで，(3.16) 中の対称群 S_{k-1} の要素である $(k-1)!$ 個の置換 σ は全て，積分 (3.17) に同一の寄与を与えることを用いた．また，区間 I 上の 2 乗

可積分関数に作用する，積分核 $K(\lambda,\lambda')$ をもつ積分演算子を

$$\hat{K}|_I : f(\lambda) \mapsto (\hat{K}|_I \circ f)(\lambda) = \int_I d\lambda' \, K(\lambda,\lambda') f(\lambda')$$

と定義し，この関数空間上の固有値の無限和（汎関数トレース）を Tr と記した．

一般に，量 X が連結な元からの寄与の総和 $\sum_i x_i^{(\mathrm{conn})}$ であるとき，指数写像 $\exp X = 1 + X + X^2/2! + \cdots$ が連結成分のみの集合を非連結を含む集合に写すこと（$X \cdot X$ 中の各要素 $x_i^{(\mathrm{conn})} x_j^{(\mathrm{conn})}$ は 2 つの連結成分に分解できる元を表し，1/2! は同一要素の数え過ぎを補償する）は，統計力学や量子力学においてファインマングラフによる摂動展開を学んだ読者はよくご存知であろう．この事実を敷衍すると，以下の補題が導かれる．

補題 3.4　k 点クラスター関数 $R_k^{(\mathrm{conn})}$ の I 上の積分に対する母関数 (3.17) とギャップ確率 $E_k(I)$ に対する母関数 (2.33) は，指数写像

$$\tau(\xi; I) = \exp F(\xi; I) = \mathrm{Det}(\mathbb{I} - \xi \hat{K}|_I) \tag{3.18}$$

で結ばれる．

中辺から右辺への移行には跡と行列式の間の関係 $\mathrm{Tr}\log = \log\mathrm{Det}$ を用いた．この $\mathrm{Det}(\cdots|_I)$ は，区間 I 上の 2 乗可積分関数が張るヒルベルト空間上に作用する演算子の行列式（固有値の無限積）であり，フレドホルム行列式と呼ばれる．(3.18) と (2.33) の右辺同士を等値し，ξ で微分して $(1-\xi)^k$ の係数を抜き出すと，ギャップ確率を演算子 $\hat{K}|_I$ のフレドホルム行列式およびレゾルベント演算子の冪のトレース $T_n(I) := \mathrm{Tr}\big(\hat{K}|_I(\mathbb{I} - \hat{K}|_I)^{-1}\big)^n$ で表す式

$$\begin{aligned}
E_0(I) &= \det(\mathbb{I} - \hat{K}|_I), \\
E_1(I) &= E_0 T_1, \\
E_2(I) &= \frac{E_0}{2!}\left(T_1^2 - T_2\right), \\
E_3(I) &= \frac{E_0}{3!}\left(T_1^3 - 3T_1T_2 + 2T_3\right), \\
E_4(I) &= \frac{E_0}{4!}\left(T_1^4 - 6T_1^2T_2 + 3T_2^2 + 8T_1T_3 - 6T_4\right), \\
E_5(I) &= \frac{E_0}{5!}\left(T_1^5 - 10T_1^3T_2 + 20T_1^2T_3 + 15T_1T_2^2 - 20T_2T_3 - 30T_1T_4 + 24T_5\right), \\
E_6(I) &= \frac{E_0}{6!}\left\{\begin{array}{l} T_1^6 - 15T_1^4T_2 + 40T_1^3T_3 + 45T_1^2T_2^2 - 90T_1^2T_4 - 120\times \\ T_1T_2T_3 - 15T_2^3 + 144T_1T_5 + 90T_2T_4 + 40T_3^2 - 120T_6 \end{array}\right\}, \\
E_7(I) &= \frac{E_0}{7!}\left\{\begin{array}{l} T_1^7 - 21T_1^5T_2 + 70T_1^4T_3 + 105T_1^3T_2^2 - 210T_1^3T_4 - 420\times \\ T_1^2T_2T_3 - 105T_1T_2^3 + 504T_1^2T_5 + 630T_1T_2T_4 + 280T_1T_3^2 \\ +210T_2^2T_3 - 840T_1T_6 - 504T_2T_5 - 420T_3T_4 + 720T_7 \end{array}\right\},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

などが得られる．

3.3 クリストッフェル–ダルブー公式

ここまで，ユニタリー集団 $\beta = 2$ の場合に，正規直交関数の双線形形式 (3.3) であるカーネルによって固有値相関関数および個別固有値分布が簡潔に表されることを見た．しかし，ランダム行列の準位統計への適用においては，熱力学極限 $N \to \infty$ をとる必要が生じる．この際に，$\psi_0, \ldots, \psi_{N-1}$ の全てに渉る総和を含む (3.3) 式のままでは扱いが若干面倒である．この技術的問題を回避する便利な手法が，以下の公式である．

定理 3.2（クリストッフェル–ダルブー） カーネル $K(\lambda, \lambda')$ は，ψ_{N-1} と ψ_N のみを用いて次式で表される：

$$K(\lambda, \lambda') = \sqrt{\frac{p_N}{p_{N-1}}} \frac{\psi_N(\lambda)\psi_{N-1}(\lambda') - \psi_{N-1}(\lambda)\psi_N(\lambda')}{\lambda - \lambda'}. \tag{3.20}$$

[証明] まず，モニックな直交多項式系 $\{P_k(\lambda)\}_{k\in\mathbb{N}}$ は 3 項間漸化式

$$\lambda P_k(\lambda) = P_{k+1}(\lambda) + s_k P_k(\lambda) + t_k P_{k-1}(\lambda) \tag{3.21}$$

を満たすことに注意する．ここで s_k, t_k は係数であり，便宜上 $P_{-1}(\lambda) = 0$ と定義した．右辺に P_{k-2} 以下の次数の直交多項式が現れないことは，

$$P_{k-2} \cdot \lambda P_k = \lambda P_{k-2} \cdot P_k = \big(P_{k-1} + \text{低次の多項式}\big) P_k$$

などに重み $\mathrm{e}^{-V(\lambda)}$ を付して積分すれば 0 になることから従う．また，

$$P_k \cdot \lambda P_{k-1} = \lambda P_k \cdot P_{k-1} = (P_{k+1} + s_k P_k + t_k P_{k-1}) P_{k-1}$$

の両辺を同様に積分することにより

$$p_k = t_k p_{k-1} \tag{3.22}$$

が得られる．(3.21) および (3.22) を用いてカーネル (3.3) 中の総和は，

$$\begin{aligned}
(\lambda - \lambda') \sum_{k=0}^{N-1} \frac{P_k(\lambda)P_k(\lambda')}{p_k} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\lambda P_k(\lambda)\, P_k(\lambda') - (\lambda \leftrightarrow \lambda')}{p_k} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(P_{k+1}(\lambda) + s_k P_k(\lambda) + t_k P_{k-1}(\lambda))\, P_k(\lambda') - (\lambda \leftrightarrow \lambda')}{p_k} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{P_{k+1}(\lambda)P_k(\lambda')}{p_k} + \frac{P_{k-1}(\lambda)P_k(\lambda')}{p_{k-1}} - (\lambda \leftrightarrow \lambda') \right\} \\
&= \frac{P_N(\lambda)P_{N-1}(\lambda') - (\lambda \leftrightarrow \lambda')}{p_{N-1}}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

となる．この両辺に $\mathrm{e}^{-(V(\lambda)+V(\lambda'))/2}/(\lambda - \lambda')$ を乗じ，正規直交関数の定義式 (3.2) を用いて (3.20) を得る．□

特に $\lambda' \to \lambda$ の極限をとると，固有値密度（3.2 節冒頭の式）に対する表式

$$\rho(\lambda) = \sqrt{\frac{p_N}{p_{N-1}}}\left(\psi'_N(\lambda)\psi_{N-1}(\lambda) - \psi'_{N-1}(\lambda)\psi_N(\lambda)\right) \tag{3.24}$$

も得られる．

標準的な直交多項式に随伴するランダム行列集団は「古典的ランダム行列」と呼ばれる．特に，ポテンシャル関数が以下の場合，

・ガウス型ユニタリー集団 (GUE): $V(\lambda) = \lambda^2$,

・ラゲール型ユニタリー集団 (LUE): $V(\lambda) = \begin{cases} \lambda - \alpha \log \lambda & (\lambda \geq 0) \\ \infty & (\lambda < 0) \end{cases}$,

重み $\mathrm{e}^{-V(\lambda)}$ によって直交するモニックな多項式とそれらのノルムは，エルミート多項式およびラゲール多項式により

$$\text{GUE :} \quad P_n(\lambda) = 2^{-n} H_n(\lambda),\ p_n = 2^{-n} n! \sqrt{\pi}, \tag{3.25}$$

$$\text{LUE :} \quad P_n^{(\alpha)}(\lambda) = (-1)^n n!\, L_n^{\alpha}(\lambda),\ p_n^{(\alpha)} = n! \Gamma(n + \alpha + 1) \tag{3.26}$$

で与えられる．これらから構成される $\mathbb{R}$ および $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上での正規直交関数

$$\psi(\lambda) = p_n^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-\lambda^2/2}\, P_n(\lambda), \quad \psi^{(\alpha)}(\lambda) = p_n^{(\alpha)-1/2}\, \mathrm{e}^{-\lambda/2}\, P_n^{(\alpha)}(\lambda) \tag{3.27}$$

を (3.2), (3.24) に代入してカーネルが得られる：

$$\text{GUE :} \quad K_N(\lambda, \lambda') = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda^2 + \lambda'^2)/2}}{2^N (N-1)! \sqrt{\pi}} \frac{H_N(\lambda) H_{N-1}(\lambda') - H_{N-1}(\lambda) H_N(\lambda')}{\lambda - \lambda'}, \tag{3.28}$$

$$\text{LUE :} \quad K_N^{(\alpha)}(\lambda, \lambda') = \frac{-N!}{\Gamma(N + \alpha)}\, \mathrm{e}^{-(\lambda + \lambda')/2} (\lambda \lambda')^{\alpha/2} \times \frac{L_N^{\alpha}(\lambda) L_{N-1}^{\alpha}(\lambda') - L_{N-1}^{\alpha}(\lambda) L_N^{\alpha}(\lambda')}{\lambda - \lambda'}. \tag{3.29}$$

有限の N に対する固有値密度 $\rho(\lambda) = K_N(\lambda, \lambda)$ および $K_N^{(0)}(\lambda, \lambda)$ を図 3.1 に示す．

3.4 固有値相関関数：$\beta = 4, 1$

本節では 4 元数自己双対 ($\beta = 4$) および実対称 ($\beta = 1$) 行列集団の固有値が，次の定理によるパフィアンプロセスに従う確率変数であることを示す．4 元数行列式 qdet およびパフィアン Pf の定義は付録 A.3 を参照されたい．また，以下では歪単位行列を $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\,(i\sigma_2, \ldots, i\sigma_2)$，符号関数を $\mathrm{sgn}(x) = \pm 1$ $(x \gtrless 0)$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$，および $\epsilon(x) = \mathrm{sgn}(x)/2$ と表記する．

定理 3.3（パフィアン点プロセス） $\beta = 4$ および 1 をもつ確率密度 (2.16) に従う固有値 $\{\lambda\}$ の k 点相関関数は

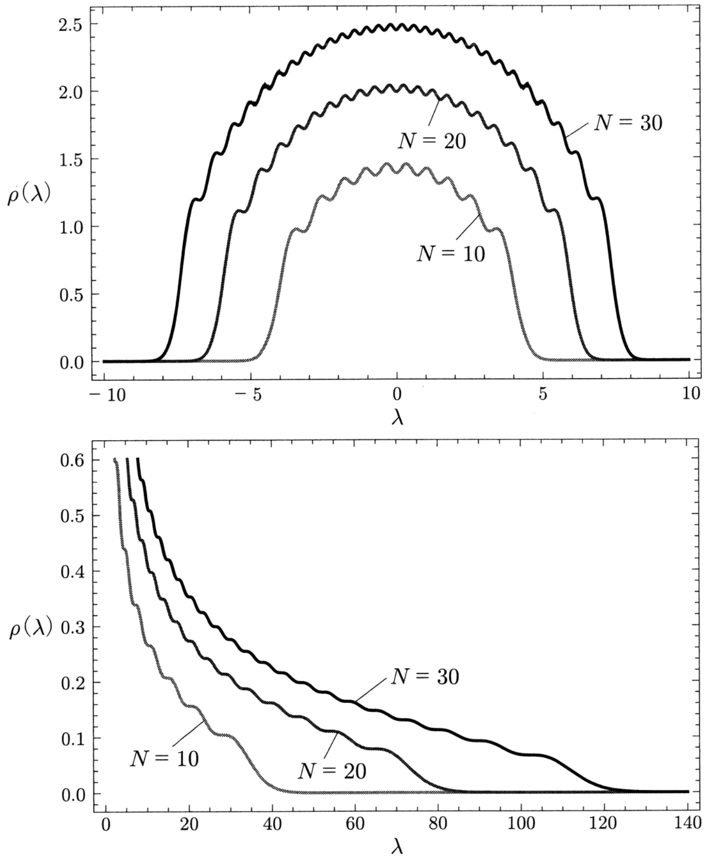


図 3.1　(a) ガウス型ユニタリー集団および (b) ラゲール型ユニタリー集団 ($\alpha = 0$, $N = 10, 20, 30$) の固有値密度．ラージ N 極限で両者はウィグナーの半円則およびマルチェンコ-パスツール則（4.3 節）に漸近する．

$$R_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \mathrm{qdet}[\boldsymbol{K}_\beta(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^k = \mathrm{Pf}\, \boldsymbol{J}[\boldsymbol{K}_\beta(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^k, \quad (3.30)$$

$$\boldsymbol{K}_\beta(\lambda, \lambda') = \begin{bmatrix} S_\beta(\lambda, \lambda') & \tilde{I}_\beta(\lambda, \lambda') \\ D_\beta(\lambda, \lambda') & S_\beta(\lambda', \lambda) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

と表される．ここで 4 元数カーネルと呼ばれる 2×2 行列値 2 変数関数 $\boldsymbol{K}_\beta(\lambda, \lambda')$ の要素 $S_\beta, D_\beta, \tilde{I}_\beta$ は，歪対称内積

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &:= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \mathrm{e}^{-V(\lambda)} \left(f(\lambda) g'(\lambda) - b(\lambda) g(\lambda) \right) \quad (3.32) \\ &:= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left(\mathrm{e}^{-V(\lambda)/2} f(\lambda) \right) \overset{\leftrightarrow}{\partial_\lambda} \left(\mathrm{e}^{-V(\lambda)/2} g(\lambda) \right), \end{aligned}$$

$$\langle\!\langle f, g \rangle\!\rangle := \iint_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, d\lambda'\, \mathrm{e}^{-V(\lambda) - V(\lambda')}\, \epsilon(\lambda' - \lambda) f(\lambda) g(\lambda') \quad (3.33)$$

のもとで歪直交する多項式系 $\{Q_i(\lambda)\}_{i\in\mathbb{N}}$ および $\{R_i(\lambda)\}_{i\in\mathbb{N}}$，

$$
\begin{aligned}
&\langle Q_{2i}, Q_{2j+1}\rangle = -\langle Q_{2j+1}, Q_{2i}\rangle = q_i\delta_{ij},\\
&\langle Q_{2i}, Q_{2j}\rangle = \langle Q_{2i+1}, Q_{2j+1}\rangle = 0;\\
&\langle\!\langle R_{2i}, R_{2j+1}\rangle\!\rangle = -\langle\!\langle R_{2j+1}, R_{2i}\rangle\!\rangle = r_i\delta_{ij},\\
&\langle\!\langle R_{2i}, R_{2j}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle R_{2i+1}, R_{2j+1}\rangle\!\rangle = 0,
\end{aligned}
$$

とその歪ノルム $\{q_i\}$, $\{r_i\}$ から構成される歪正規直交関数系 $\{\varphi_i(\lambda)\}$, $\{\phi_i(\lambda)\}$,

$$
\varphi_i(\lambda) := q_{[i/2]}^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-V(\lambda)/2}\,Q_i(\lambda), \quad \phi_i(\lambda) := r_{[i/2]}^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-V(\lambda)}\,R_i(\lambda), \tag{3.34}
$$

$\varphi_i(\lambda)$ の導関数 $\varphi'_j(\lambda)$，および $\phi_i(\lambda)$ の原始関数

$$
\Phi_i(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda'\,\epsilon(\lambda-\lambda')\phi_i(\lambda') \tag{3.35}
$$

（$\frac{d}{d\lambda}\epsilon(\lambda) = \delta(\lambda)$ である）から以下のように構成される：

$$
\begin{aligned}
S_4(\lambda,\lambda') &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\varphi_{2i}(\lambda)\varphi'_{2i+1}(\lambda') - \varphi_{2i+1}(\lambda)\varphi'_{2i}(\lambda')\right),\\
D_4(\lambda,\lambda') &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\varphi'_{2i}(\lambda)\varphi'_{2i+1}(\lambda') - \varphi'_{2i+1}(\lambda)\varphi'_{2i}(\lambda')\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}S_4(\lambda,\lambda'),\\
\tilde{I}_4(\lambda,\lambda') &= -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\varphi_{2i}(\lambda)\varphi_{2i+1}(\lambda') - \varphi_{2i+1}(\lambda)\varphi_{2i}(\lambda')\right)\\
&= \int_{\lambda'}^{\lambda} d\lambda''\,S_4(\lambda,\lambda''),\\
S_1(\lambda,\lambda') &= \sum_{i=0}^{N/2-1}\left(\phi_{2i}(\lambda)\Phi_{2i+1}(\lambda') - \phi_{2i+1}(\lambda)\Phi_{2i}(\lambda')\right),\\
D_1(\lambda,\lambda') &= \sum_{i=0}^{N/2-1}\left(\phi_{2i}(\lambda)\phi_{2i+1}(\lambda') - \phi_{2i+1}(\lambda)\phi_{2i}(\lambda')\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda'}S_1(\lambda,\lambda'),\\
I_1(\lambda,\lambda') &= -\sum_{i=0}^{N/2-1}\left(\Phi_{2i}(\lambda)\Phi_{2i+1}(\lambda') - \Phi_{2i+1}(\lambda)\Phi_{2i}(\lambda')\right)\\
&= \int_{\lambda}^{\lambda'} d\lambda''\,S_1(\lambda'',\lambda'),\\
\tilde{I}_1(\lambda,\lambda') &= I_1(\lambda,\lambda') - \epsilon(\lambda-\lambda').
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

ただし $\beta = 1$ の場合の N は偶とした．この主定理の証明のため，まず 2 つの補題を示す．

補題 3.5（差積の合流形） 定理 2.2 の固有値分布関数 ($\beta = 4$) に現れる差積因子は

$$
\prod_{i>j}^{N}(\lambda_i - \lambda_j)^4 = \det\begin{bmatrix} \lambda_i^{j-1} \\ (j-1)\lambda_i^{j-2} \end{bmatrix}_{\substack{i=1,\ldots,N\\ j=1,\ldots,2N}} \tag{3.37}
$$

と行列式形に表される．

[証明] 補題 2.2 において $N \mapsto 2N$ と置き換えた式の各奇数番目の行を直下の偶数番目の行から引いても行列式の値は変わらない：

$$\prod_{i>j}^{2N}(\lambda_i - \lambda_j) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{2N-1} \\ 1-1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_2^{2N-1} - \lambda_1^{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}.$$

両辺を $\prod_{i=1}^N(\lambda_{2i} - \lambda_{2i-1})$ で割り，合流極限 $\lambda_{2i} \to \lambda_{2i-1}$ $(i = 1, \cdots, N)$ をとると，左辺は $\prod_{i>j}^N(\lambda_{2i-1} - \lambda_{2j-1})^4$ となり，右辺の偶数行は直上の奇数行の微分となる．最後に $\lambda_{2i-1} \mapsto \lambda_i$ と名称を変更すればよい．□

補題 3.6（差積の絶対値） 定理 2.2 の固有値分布関数（$\beta = 1$，ただし N は偶数とする）に現れる差積因子は，

$$\prod_{i>j}^N |\lambda_i - \lambda_j| = \mathrm{Pf}\,[\mathrm{sgn}(\lambda_i - \lambda_j)]_{i,j=1}^N \det\left[\lambda_i^{j-1}\right]_{i,j=1}^N \tag{3.38}$$

と行列式形に表される．

[証明] 絶対値なしの差積との差異である符号部分 $\prod_{i>j}^N \mathrm{sgn}(\lambda_i - \lambda_j)$ を評価すればよい．まず $\{\lambda\}$ が，符号部分が自明に $+1$ となる順序 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N$ に並んでいる場合を考える．このときすべての行列要素は 1 であるから，$\mathrm{Pf}\,[\mathrm{sgn}(\lambda_i - \lambda_j)]_{i,j=1}^N = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma)$ となる．奇数 $((N-1)!!)$ 個の σ のうち，恒等置換を含む偶置換の総数が奇置換よりも 1 つ多いので，パフィアンも $+1$ となり成立する．上の順序から隣接する任意の λ_i と λ_{i+1} を交換すると，符号部分およびパフィアンのいずれも符号を変える．この互換を繰り返すと任意の順序に $\{\lambda\}$ を並べられるので，補題は成立する．□

$\beta = 2$ の場合と同様に，(3.37)，(3.38) の行列式のある列に別の列の定数倍を加えても値は変わらないから，行列要素を任意のモニック多項式 $Q_{j-1}(\lambda_i) = \lambda_i^{j-1} + \cdots$ と $Q'_{j-1}(\lambda_i) = (j-1)\lambda_i^{j-2} + \cdots$（$\beta = 4$ の場合），および $R_{j-1}(\lambda_i) = \lambda_i^{j-1} + \cdots$（$\beta = 1$ の場合）で置き換えてよい：

$$\begin{aligned}\prod_{i>j}^N(\lambda_i - \lambda_j)^4 &= \det\begin{bmatrix} Q_{j-1}(\lambda_i) \\ Q'_{j-1}(\lambda_i) \end{bmatrix}_{\substack{i=1,\ldots,N \\ j=1,\ldots,2N}}, \\ &= \det\begin{bmatrix} Q_{j-1}(\lambda_i) \\ Q'_{j-1}(\lambda_i) - Q_{j-1}(\lambda_i)V(\lambda_i)/2 \end{bmatrix}_{\substack{i=1,\ldots,N \\ j=1,\ldots,2N}},\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\prod_{i>j}^N |\lambda_i - \lambda_j| = \mathrm{Pf}\,[\mathrm{sgn}(\lambda_i - \lambda_j)]_{i,j=1}^N \det\,[R_{j-1}(\lambda_i)]_{i,j=1}^N.$$

両辺に重み関数 $\prod_{i=1}^N \mathrm{e}^{-V(\lambda_i)}$ を掛け，正定数列 $\{q_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\{r_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を用いて関数 (3.34) を定義すると，連結確率密度 (2.16) は [新たな規格化定数を Z' と

記す]

$$P_{\beta=4}(\{\lambda\}) \;=\; {Z'}^{-1}\det\begin{bmatrix}\varphi_{j-1}(\lambda_i)\\ \varphi'_{j-1}(\lambda_i)\end{bmatrix}_{\substack{i=1,\dots,N\\ j=1,\dots,2N}}, \tag{3.40}$$

$$P_{\beta=1}(\{\lambda\}) \;=\; {Z'}^{-1}\,\mathrm{Pf}\,[\mathrm{sgn}(\lambda_i-\lambda_j)]_{i,j=1}^{N}\det[\phi_{j-1}(\lambda_i)]_{i,j=1}^{N} \tag{3.41}$$

と表される．$\beta=4$ の場合，(3.40) 中の det については (A.19) および (A.6) から従う恒等式

$$\begin{aligned}
&\det\begin{bmatrix}\varphi_{2j}(\lambda_i) & \varphi_{2j+1}(\lambda_i)\\ \varphi_{2j}(\lambda_i) & \varphi_{2j+1}(\lambda_i)\end{bmatrix}_{\substack{i=1,\dots,N\\ j=0,\dots,N-1}}\\
&=\mathrm{qdet}\begin{bmatrix}\varphi_{2j}(\lambda_i) & \varphi_{2j+1}(\lambda_i)\\ \varphi_{2j}(\lambda_i) & \varphi_{2j+1}(\lambda_i)\end{bmatrix}_{\substack{i=1,\dots,N\\ j=0,\dots,N-1}}\\
&\quad\times\begin{bmatrix}\varphi_{2j+1}(\lambda_k) & -\varphi_{2j+1}(\lambda_k)\\ -\varphi_{2j}(\lambda_k) & \varphi_{2j}(\lambda_k)\end{bmatrix}_{\substack{j=0,\dots,N-1\\ k=1,\dots,N}}\\
&=2^N\,\mathrm{qdet}\begin{bmatrix}S_4(\lambda_i,\lambda_k) & \tilde{I}_4(\lambda_i,\lambda_k)\\ D_4(\lambda_i,\lambda_k) & S_4(\lambda_k,\lambda_i)\end{bmatrix}_{i,k=1}^{N}
\end{aligned}$$

を用いると，連結確率密度は規格化係数を除いて定理中の 4 元カーネル $\boldsymbol{K}_4$ により表される．

一方 $\beta=1$ の場合，(3.41) 中の det については，$\mathrm{Pf}^2=\det$ から従う恒等式

$$\begin{aligned}
&\det[\phi_{2j}(\lambda_i)\ \phi_{2j+1}(\lambda_i)]_{\substack{i=1,\dots,N\\ j=0,\dots,N/2-1}}=\det\begin{bmatrix}\phi_{2j+1}(\lambda_k)\\ -\phi_{2j}(\lambda_k)\end{bmatrix}_{\substack{j=0,\dots,N/2-1\\ k=1,\dots,N}}\\
&=\mathrm{Pf}\,[D_1(\lambda_i,\lambda_k)]_{i,k=1}^{N}
\end{aligned}$$

を用いると，

$$P_{\beta=1}(\{\lambda\})={Z''}^{-1}\,\mathrm{Pf}\begin{bmatrix}[D_1(\lambda_i,\lambda_k)]_{i,k=1}^{N} & 0\\ 0 & [\epsilon(\lambda_i-\lambda_k)]_{i,k=1}^{N}\end{bmatrix} \tag{3.42}$$

となる．固有値の組 $\{\lambda\}=(\lambda_1,\dots,\lambda_N)$ に対して $\boldsymbol{\phi}=[\phi_{i-1}(\lambda_j)]_{i,j=1}^{N}$, $\boldsymbol{\Phi}=[\Phi_{i-1}(\lambda_j)]_{i,j=1}^{N}$ と行列表記し，$\mathbf{A}:=-\boldsymbol{\phi}^{-1}\boldsymbol{\Phi}$ と定義すると，

$$\Phi_i(\lambda_j)=-\sum_{k=1}^{N}\phi_i(\lambda_k)A_{kj}(\{\lambda\})\quad(\text{行列形では } \boldsymbol{\Phi}=-\boldsymbol{\phi}\mathbf{A})$$

となる．なお固有値が縮退して逆行列が存在しない確率は (2.16) から 0 である．(3.31) で定義される S_1 および I_1 はこの $\mathbf{A}$ 行列を用いて

$$S_1(\lambda_i,\lambda_j)=-\sum_{j}D_1(\lambda_i,\lambda_k)A_{kj}(\{\lambda\})$$

（行列形では $\mathbf{S}_1 = -\mathbf{D}_1\mathbf{A}$），

$$I_1(\lambda_i, \lambda_j) = -\sum_{k,\ell} A_{ki}(\{\lambda\}) D_1(\lambda_k, \lambda_\ell) A_{\ell j}(\{\lambda\})$$

（行列形では $\mathbf{I}_1 = -\mathbf{A}^T\mathbf{D}_1\mathbf{A}$）

と表される．(3.42) 式中の行列に対して，行列式を保つ 2 つの操作

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 \\ \mathbf{D}_1\mathbf{A} & \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix}$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{A}^T\mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_1\mathbf{A} & \mathbf{A}^T\mathbf{D}_1\mathbf{A} + \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{S}_1^T \\ -\mathbf{S}_1 & -\mathbf{I}_1 + \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix}$$

（$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon(\lambda_i - \lambda_k)]_{i,k=1}^N$ と記した）を続けて行うと反対称性が保たれ，

$$P_{\beta=1}(\{\lambda\}) = Z''^{-1}\,\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} D_1(\lambda_i, \lambda_k) & S_1(\lambda_k, \lambda_i) \\ -S_1(\lambda_i, \lambda_k) & -\tilde{I}_1(\lambda_i, \lambda_k) \end{bmatrix}_{i,k=1,\dots,N} \tag{3.43}$$

が得られる．最後に Pf と qdet の関係式 (A.18) により，(3.43) 中の行列の左から $\boldsymbol{J}^{-1}$ をかけて定理中の 4 元カーネル $\boldsymbol{K}_1$ が得られる．

次の補題は $\{\varphi_i(\lambda)\}$ および $\{\phi_i(\lambda)\}$ の歪正規直交性

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \varphi_i(\lambda)\, \overleftrightarrow{\partial_\lambda}\, \varphi_j(\lambda) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, d\lambda' \phi_i(\lambda)\epsilon(\lambda' - \lambda)\phi_j(\lambda') = J_{ij}$$

から直ちに従う：

補題 3.7（射影性） 4 元数カーネル $\boldsymbol{K}_\beta(\lambda, \lambda')$ $(\beta = 4, 1)$ は次式を満たす：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda'\, \boldsymbol{K}_4(\lambda, \lambda')\boldsymbol{K}_4(\lambda', \lambda'') = \boldsymbol{K}_4(\lambda, \lambda''),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda'\, \boldsymbol{K}_1(\lambda, \lambda')\boldsymbol{K}_1(\lambda', \lambda'')$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{K}_1(\lambda, \lambda'') + \boldsymbol{K}_1(\lambda, \lambda'') \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.44}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \boldsymbol{K}_\beta(\lambda, \lambda) = N I_2. \tag{3.45}$$

$\beta = 1$ の場合，スカラー部分 $(\cdots)^{(0)} = \mathrm{tr}(\cdots)/2$ をとる際には循環性から

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{(0)} = \boldsymbol{A}^{(0)}$$

であることを考慮すると，補題 3.3 と全く同様にして次の補題が成立する：

補題 3.8 $\mathrm{qdet}[\boldsymbol{K}_\beta(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^p$ $(\beta = 4, 1)$ は次の漸化式を満たす：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_p \, \mathrm{qdet}[\boldsymbol{K}_\beta(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^{p} = (N-p+1)\,\mathrm{qdet}[\boldsymbol{K}_\beta(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^{p-1}. \quad (3.46)$$

上の補題を繰り返して用いることにより，次式が得られる：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_{k+1}\cdots d\lambda_N \, \mathrm{qdet}[\boldsymbol{K}_\beta(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^{N} = (N-k)!\,\mathrm{qdet}[\boldsymbol{K}_\beta(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^{k}. \quad (3.47)$$

上式の $k=0$ の場合の右辺が $N!$ であることから規格化定数が $Z''=N!$ と定まり，確率密度 (2.16) は

$$P_\beta(\{\lambda\}) = \frac{1}{N!}\,\mathrm{qdet}[\boldsymbol{K}_\beta(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^{N} \quad (3.48)$$

と表される．定義 (2.30)，(3.47)，および (3.48) より，固有値の k 点相関関数について (3.30) が成立する．□

3.5 フレドホルム行列式：$\beta=4,1$

以下では簡潔のためカーネル中の添字 β は略す．パフィアン点プロセスに従う固有値相関関数 (3.30) の具体形は 4 元数行列式を展開して

$$R_1(\lambda) = \boldsymbol{K}(\lambda,\lambda)^{(0)} = S(\lambda,\lambda), \text{（固有値密度）} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} R_2(\lambda_1,\lambda_2) &= \boldsymbol{K}(\lambda_1,\lambda_1)^{(0)}\boldsymbol{K}(\lambda_2,\lambda_2)^{(0)} - (\boldsymbol{K}(\lambda_1,\lambda_2)\boldsymbol{K}(\lambda_2,\lambda_1))^{(0)} \\ &= S(\lambda_1,\lambda_1)S(\lambda_2,\lambda_2) - S(\lambda_1,\lambda_2)S(\lambda_2,\lambda_1) + D(\lambda_1,\lambda_2)\tilde{I}(\lambda_1,\lambda_2), \quad (3.50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &R_3(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \\ &\boldsymbol{K}(\lambda_1,\lambda_1)^{(0)}\boldsymbol{K}(\lambda_2,\lambda_2)^{(0)}\boldsymbol{K}(\lambda_3,\lambda_3)^{(0)} - \boldsymbol{K}(\lambda_1,\lambda_1)^{(0)}(\boldsymbol{K}(\lambda_2,\lambda_3)\boldsymbol{K}(\lambda_3,\lambda_2))^{(0)} \\ &-\boldsymbol{K}(\lambda_2,\lambda_2)^{(0)}(\boldsymbol{K}(\lambda_1,\lambda_3)\boldsymbol{K}(\lambda_3,\lambda_1))^{(0)} - \boldsymbol{K}(\lambda_3,\lambda_3)^{(0)}(\boldsymbol{K}(\lambda_1,\lambda_2)\boldsymbol{K}(\lambda_2,\lambda_1))^{(0)} \\ &+(\boldsymbol{K}(\lambda_1,\lambda_2)\boldsymbol{K}(\lambda_2,\lambda_3)\boldsymbol{K}(\lambda_3,\lambda_1))^{(0)} + (\boldsymbol{K}(\lambda_1,\lambda_3)\boldsymbol{K}(\lambda_3,\lambda_2)\boldsymbol{K}(\lambda_2,\lambda_1))^{(0)} \\ &= S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}S_{32} - S_{22}S_{13}S_{31} - S_{33}S_{12}S_{21} + S_{12}S_{23}S_{31} \\ &+ S_{13}S_{21}S_{32} + S_{11}D_{23}\tilde{I}_{23} + S_{22}D_{13}\tilde{I}_{13} + S_{33}D_{12}\tilde{I}_{12} - S_{12}D_{13}\tilde{I}_{23} \\ &- S_{21}D_{23}\tilde{I}_{13} - S_{23}D_{12}\tilde{I}_{13} - S_{32}D_{13}\tilde{I}_{12} + S_{13}D_{12}\tilde{I}_{23} + S_{31}D_{23}\tilde{I}_{12} \quad (3.51) \end{aligned}$$

などとなる [$R_3(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ においては $S_{12}=S(\lambda_1,\lambda_2)$ などと略記した]．各 R_k 中の末尾の項は，k 個の固有値がカーネルによって単一のループに繋がっている連結成分，あるいは k 点クラスター関数である：

$$\begin{aligned} &R_k^{(\mathrm{conn})}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = (-1)^{k-1}\times \\ &\sum_{\sigma\in S_{k-1}} \left(\boldsymbol{K}(\lambda_{\sigma(1)},\lambda_{\sigma(2)})\boldsymbol{K}(\lambda_{\sigma(2)},\lambda_{\sigma(3)})\cdots\boldsymbol{K}(\lambda_{\sigma(k-1)},\lambda_k)\boldsymbol{K}(\lambda_k,\lambda_{\sigma(1)})\right)^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

これらのクラスター関数の，区間 $I^{\otimes k}$ 上での積分に対する母関数 $F(\xi;I)$ は，

$$\begin{aligned}F(\xi;I) &:= \sum_{k=1}^{N}\frac{(-\xi)^k}{k!}\int_I d\lambda_1\cdots d\lambda_k\, R^{(\mathrm{conn})}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\\ &= -\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi^k}{k}\int_I d\lambda_1\cdots d\lambda_k \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{K}(\lambda_1,\lambda_2)\cdots\boldsymbol{K}(\lambda_k,\lambda_1))\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi^k}{k}\,\mathrm{Tr}\,(\hat{\boldsymbol{K}}|_I)^k = \mathrm{Tr}\log(\mathbb{I}-\xi\hat{\boldsymbol{K}}|_I)^{1/2}\end{aligned} \tag{3.53}$$

となる．ここで，区間 I 上の 2 乗可積分な 2 成分関数 $\vec{f}(\lambda)$ に作用する，積分核 $\boldsymbol{K}(\lambda,\lambda')$ をもつ積分演算子を

$$\hat{\boldsymbol{K}}|_I : \vec{f}(\lambda)\mapsto(\hat{\boldsymbol{K}}|_I\circ\vec{f})(\lambda) = \int_I d\lambda'\,\boldsymbol{K}(\lambda,\lambda')\vec{f}(\lambda')$$

と定義した．またここでは，汎関数トレースと 4 元数の 2×2 行列表現のトレースをあわせて Tr と記した．補題 3.4 と同様にして，(3.53) から以下の補題が導かれる．

補題 3.9 k 点クラスター関数 $R_k^{(\mathrm{conn})}$ に対する母関数 (3.53) と k 点相関関数 R_k に対する母関数 (2.33) は，指数写像

$$\tau(\xi;I) = \exp F(\xi;I) = \mathrm{Det}(\mathbb{I}-\xi\hat{\boldsymbol{K}}|_I)^{1/2} \tag{3.54}$$

で結ばれる．

ここで Det は，フレドホルム行列式と 4 元数の 2×2 行列表現の行列式をまとめて表す．(3.54) 式はフレドホルムパフィアン $\mathrm{Pf}(\boldsymbol{J}-\xi\boldsymbol{J}\hat{\boldsymbol{K}}|_I)$ と考えることもできる [汎関数パフィアンを Pf で表した]．(3.54) と (2.33) の右辺を等値し，ξ で微分して $(1-\xi)^k$ の係数を抜き出すと，ギャップ確率 $E_k(I)$ は演算子 $\hat{\boldsymbol{K}}|_I$ のフレドホルム行列式およびレゾルベント演算子の冪のトレース $T_n(I) := (1/2)\,\mathrm{Tr}\big(\hat{\boldsymbol{K}}|_I(\mathbb{I}-\hat{\boldsymbol{K}}|_I)^{-1}\big)^n$ を用いて $E_0(I) = \mathrm{Det}(\mathbb{I}-\hat{\boldsymbol{K}}|_I)^{1/2}$ $(k=0)$ および (3.19) 式 $(k\geq 1)$ と表される．

3.6 歪直交多項式

$\beta=2$ の場合と同様に，古典的なポテンシャル関数

・ガウス型シンプレクティック・直交集団：$V(\lambda)=\lambda^2$ (GSE), $\lambda^2/2$ (GOE)

・ラゲール型シンプレクティック・直交集団：

$$V(\lambda) = \lambda-\alpha\log\lambda\ (\mathrm{LSE}),\ \lambda/2-\alpha\log\lambda\ (\mathrm{LOE})\quad（ただし\ \lambda\geq 0）$$

をもつ $\beta=4,1$ のランダム行列集団を考える．重み $\mathrm{e}^{-V(\lambda)}$ をもつ歪対称内積 (3.32)，(3.33) に関して歪直交するモニックな多項式 Q_n, R_n（ガウス型）およ

び $Q_n^{(\alpha)}$，$R_n^{(\alpha)}$（ラゲール型）とそれらの歪ノルムは，$\beta=2$ の場合の対応する直交多項式とそれらのノルム (3.25)，(3.26) を用いて

$$\begin{aligned}
\text{GSE}: \quad Q_{2n}(\lambda) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} P_{2k}(\lambda), && (3.55)\\
Q_{2n+1}(\lambda) &= P_{2n+1}(\lambda),\\
q_n &= p_{2n+1};\\
\text{LSE}: \quad Q_{2n}^{(\alpha)}(\lambda) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2n} n!\Gamma(n+(\alpha+1)/2)}{2^{2k} k!\Gamma(k+(\alpha+1)/2)} P_{2k}^{(\alpha-1)}(\lambda), && (3.56)\\
Q_{2n+1}^{(\alpha)}(\lambda) &= P_{2n+1}^{(\alpha-1)}(\lambda),\\
q_n^{(\alpha)} &= \frac{1}{2} p_{2n+1}^{(\alpha-1)};\\
\text{GOE}: \quad R_{2n}(\lambda) &= P_{2n}(\lambda), && (3.57)\\
R_{2n+1}(\lambda) &= P_{2n+1}(\lambda) - n\,P_{2n-1}(\lambda),\\
r_n &= p_{2n};\\
\text{LOE}: \quad R_{2n}^{(\alpha)}(\lambda) &= P_{2n}^{(2\alpha+1)}(\lambda), && (3.58)\\
R_{2n+1}^{(\alpha)}(\lambda) &= P_{2n+1}^{(2\alpha+1)}(\lambda) - 2n(2n+2\alpha+1) P_{2n-1}^{(2\alpha+1)}(\lambda),\\
r_n^{(\alpha)} &= 2 p_{2n}^{(2\alpha+1)}
\end{aligned}$$

と表されることは直接代入によりそれぞれ確認できる*2)．一例としてガウス型の場合，エルミート多項式間の漸化式 $\lambda P_{2k} = P_{2k+1} + k\,P_{2k-1}$，$P'_{2k} = 2k\,P_{2k-1}$ を併用して得られる式

$$e^{\lambda^2/2} \frac{d}{d\lambda} e^{-\lambda^2/2} P_{2k} = \left(\frac{d}{d\lambda} - \lambda\right) P_{2k} = -P_{2k+1} + k\,P_{2k-1}, \qquad (3.59)$$

および (3.55) 第 1 式から，歪直交関数と直交関数との関係式

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\lambda}\left(e^{-\lambda^2/2} Q_{2n}\right) = \frac{d}{d\lambda} e^{-\lambda^2/2} \{P_{2n} + n\,P_{2n-2} + n(n-1)P_{2n-4} + \cdots\}\\
&= e^{-\lambda^2/2} \{-P_{2n+1} + n\,P_{2n-1} + n\,(-P_{2n-1} + (n-1)\,P_{2n-3}) + \cdots\}\\
&= -\,e^{-\lambda^2/2} P_{2n+1}, \qquad (3.60)\\
&e^{-\lambda^2/2} Q_{2n}(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} d\lambda'\ e^{-\lambda'^2/2} P_{2n+1}(\lambda') \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

を導き，これを (3.32) に代入して歪直交性 $\langle Q_{2n}, Q_{2m+1}\rangle = (P_{2n+1}, P_{2m+1}) = p_{2n+1}\delta_{nm}$ が従う．また，(3.57) 第 2 式と (3.59) から得られる関係式

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' \epsilon(\lambda'-\lambda)\, e^{-\lambda'^2/2} R_{2n+1}(\lambda')\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda'\, \epsilon(\lambda'-\lambda) \frac{d}{d\lambda'}\left(e^{-\lambda'^2/2} P_{2n}(\lambda')\right) = e^{-\lambda^2/2} P_{2n}(\lambda) \qquad (3.62)
\end{aligned}$$

*2) 歪直交性の定義上これらの多項式は一意的ではなく，任意の定数列 $\{c_{2n}\}$ を用いて $Q_{2n+1}(\lambda) \mapsto Q_{2n+1}(\lambda) + c_{2n} Q_{2n}(\lambda)$ などと再定義しても歪直交性を保つ．

を (3.33) に代入して歪直交性 $\langle\!\langle R_{2m}, R_{2n+1}\rangle\!\rangle = (P_{2m}, P_{2n}) = p_{2n}\delta_{mn}$ が従う．$\langle Q_{2n}, Q_{2m}\rangle = \langle Q_{2n+1}, Q_{2m+1}\rangle = \langle\!\langle R_{2n}, R_{2m}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle R_{2n+1}, R_{2m+1}\rangle\!\rangle = 0$ は偶奇性から自明である．上の歪直交多項式と歪ノルムを (3.31)〜(3.36) に代入し，(3.60)，(3.62)，それらの偶奇性の反転，およびラゲール型における対応物を用いて直交多項式のみにより総和部分を書き換えると，4 元数カーネルの要素について以下の表示が得られる：

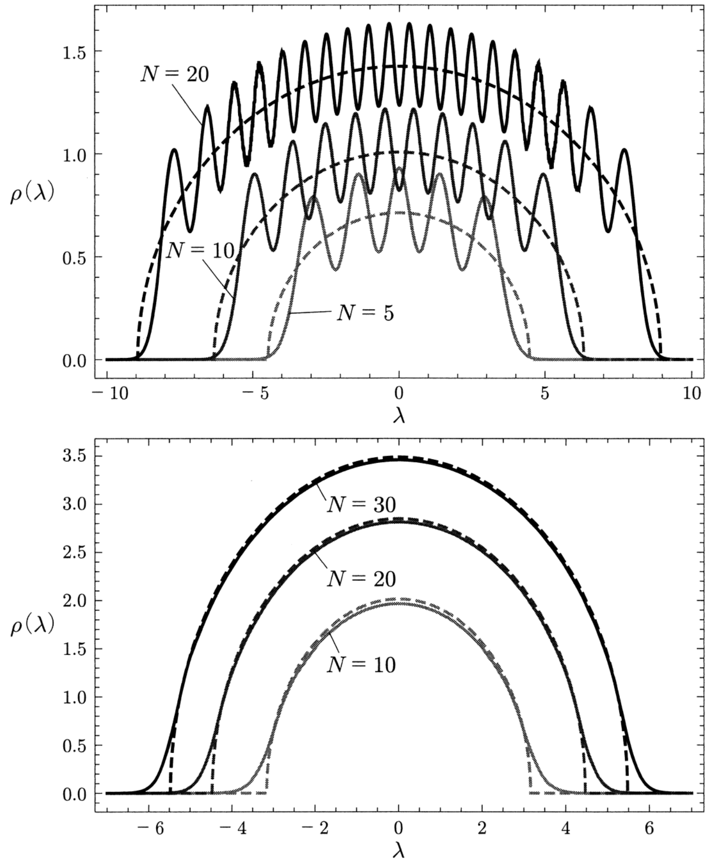


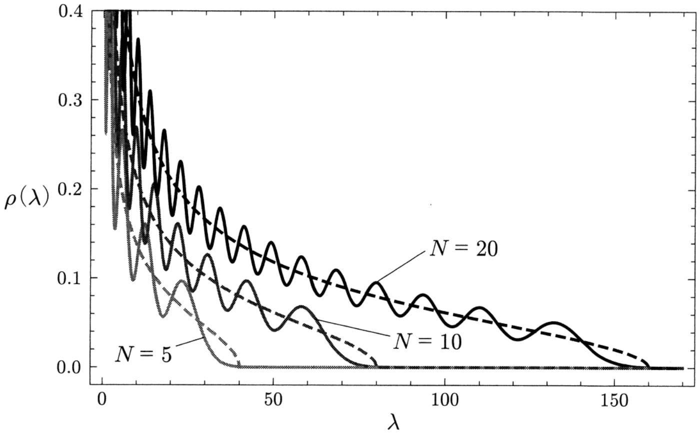
図 3.2　(a) ガウス型シンプレクティック集団 ($N = 5, 10, 20$) および (b) 直交集団 ($N = 10, 20, 30$) の固有値密度．ラージ N 極限で両者はウィグナーの半円則 $\frac{2}{\beta\pi}\sqrt{\beta N - \lambda^2}$（点線）に漸近する．

定理 3.4（**4 元数カーネル要素の総和形**）　ガウス型に対する S_4, S_1 およびラゲール型集団に対する $S_4^{(\alpha)}, S_1^{(\alpha)}$ は，対応するユニタリー集団のカーネル (3.28)，(3.29) および直交関数 (3.27) を用いて

$$\text{GSE}: S_4(\lambda, \lambda') = \frac{1}{2}K_{2N}(\lambda, \lambda') - \frac{\sqrt{N}}{2}\psi_{2N}(\lambda')\int_{\lambda}^{\infty} d\lambda''\psi_{2N-1}(\lambda''), \tag{3.63}$$

$$\text{LSE}:\ S_4^{(\alpha)}(\lambda,\lambda')=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}K_{2N}^{(\alpha-1)}(\lambda,\lambda') \tag{3.64}$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{N\left(N+\frac{\alpha-1}{2}\right)}\frac{\psi_{2N}^{(\alpha-1)}(\lambda')}{\sqrt{\lambda'}}\int_\lambda^\infty d\lambda''\frac{\psi_{2N-1}^{(\alpha-1)}(\lambda'')}{\sqrt{\lambda''}},$$
$$\text{GOE}:\ S_1(\lambda,\lambda')=K_{N-1}(\lambda,\lambda') \tag{3.65}$$
$$+\sqrt{\frac{N-1}{2}}\psi_{N-1}(\lambda')\int_{-\infty}^\infty d\lambda''\epsilon(\lambda-\lambda'')\psi_{N-2}(\lambda''),$$
$$\text{LOE}:\ S_1^{(\alpha)}(\lambda,\lambda')=\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}K_{N-1}^{(2\alpha+1)}(\lambda,\lambda') \tag{3.66}$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{(N-1)(N+2\alpha)}\frac{\psi_{N-1}^{(2\alpha+1)}(\lambda')}{\sqrt{\lambda'}}\int_0^\infty d\lambda''\epsilon(\lambda-\lambda'')\frac{\psi_{N-2}^{(2\alpha+1)}(\lambda'')}{\sqrt{\lambda''}}$$

と表される．



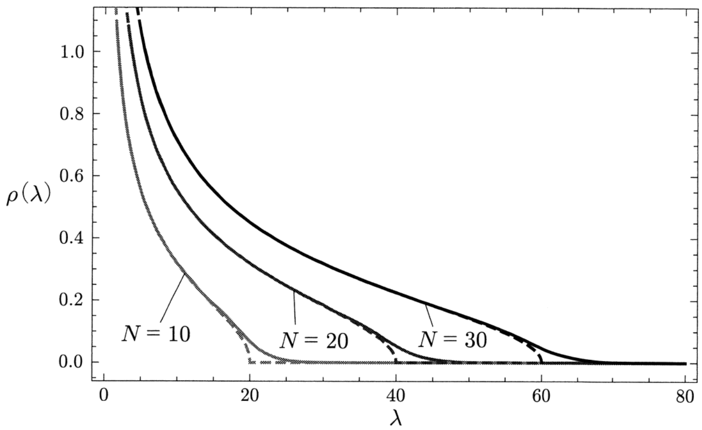


図 3.3　(a) ラゲール型シンプレクティック集団 ($N=5,10,20$) および (b) 直交集団 ($N=10,20,30$) の固有値密度．ラージ N 極限で両者はマルチェンコ–パスツール則 $\frac{1}{\beta\pi}\sqrt{\frac{2\beta N-x}{x}}$（点線）に漸近する．

有限 N のガウス型・ラゲール型集団に対する固有値密度 $\rho(\lambda)=S_\beta(\lambda,\lambda)$ および $S_\beta^{(0)}(\lambda,\lambda)$ を図 3.2，図 3.3 に示す．

3.7 まとめ

確率測度 $(dH)\,\mathrm{e}^{-\operatorname{tr}V(H)}$ をもつ $N\times N$ 行列集団 $\longrightarrow$ 固有値分布関数 $(\beta=1,2,4)$ $P(\{\lambda\})=\mathrm{e}^{-\sum_i V(\lambda_i)}\prod_{j>k}^N|\lambda_j-\lambda_k|^\beta$ $\longrightarrow$ $\searrow$

$\overset{(\beta=2)}{\longrightarrow}$ 直交多項式 $\{P_i(\lambda)\}$ $\longrightarrow$ カーネル $K(\lambda,\lambda')$

$\nearrow$ 固有値密度 $\rho(\lambda)=K(\lambda,\lambda)$

固有値相関関数 $R_k(\{\lambda\})=\det[K(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^k$

$\searrow$ ギャップ確率 $E_0(I)=\mathrm{Det}(I-\hat{K}|_I)$, etc.

$\searrow$ 個別固有値分布 $p_k^{(\max)}(\lambda)$, $p_k^{(\min)}(\lambda)$

$\overset{(\beta=4,1)}{\longrightarrow}$ 歪直交多項式 $\{Q_i(\lambda)\}$ $\{R_i(\lambda)\}$ $\longrightarrow$ 4 元数カーネル $\boldsymbol{K}(\lambda,\lambda')$

$\nearrow$ 固有値密度 $\rho(\lambda)=S(\lambda,\lambda)$

固有値相関関数 $R_k(\{\lambda\})=\mathrm{qdet}[\boldsymbol{K}(\lambda_i,\lambda_j)]_{i,j=1}^k$

$\searrow$ ギャップ確率 $E_0(I)=\sqrt{\mathrm{Det}(I-\hat{\boldsymbol{K}}|_I)}$, etc.

$\searrow$ 個別固有値分布 $p_k^{(\max)}(\lambda)$, $p_k^{(\min)}(\lambda)$

演習問題

3.1 $\exp F(\xi;I)$ を ξ について 3 次までテイラー展開し，(2.33) の中辺および 3.2 節冒頭に掲げた $R_1(\lambda)$, $R_2(\lambda_1,\lambda_2)$, $R_3(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ と比較することにより，(3.18) 式を確認せよ．

3.2 前問を敷衍して，ξ の任意次数で (3.18) の左辺と右辺が一致すること（フレドホルム展開）を証明せよ．

3.3 重み関数 $\mathrm{e}^{-V(\lambda)}=(1-\lambda)^\alpha(1+\lambda)^{\alpha'}\theta(1-|\lambda|)$ をもつユニタリー集団（ヤコビ型ユニタリー集団）のカーネル (3.20) および固有値密度 (3.24) を求めよ．

第 4 章
スケーリング極限

ランダム行列集団の固有値の統計的ゆらぎが，直交多項式および歪直交多項式の局所的なスケーリング極限によって得られる普遍的な相関関数・個別固有値分布に従うことを解説する．

4.1　ガウス型ユニタリー集団

確率測度 $\mathcal{Z}^{-1}(dH)\,\mathrm{e}^{-\operatorname{tr} H^2}$ に従って分布する $N \times N$ 複素エルミート行列の集団をガウス型ユニタリー集団 (GUE) と呼ぶ．その固有値相関関数を司るカーネルは，重み $\mathrm{e}^{-\lambda^2}$ で直交するエルミート多項式 (3.25) から作られる正規直交関数

$$\psi_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}\,\mathrm{e}^{-\lambda^2/2}\,H_n(\lambda) \tag{4.1}$$

を (3.20) に代入して得られ，エルミートカーネル (3.28) と呼ばれる．量子力学を学んだ読者は，この関数が調和振動子の定常的シュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}\lambda^2\right)\psi_n(\lambda) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\psi_n(\lambda) \tag{4.2}$$

（質量 m，角振動数 ω，プランク定数 $\hbar$ を全て 1 とする単位系を用いた）を満たす第 n 励起状態の波動関数であることをご存知であろう．もちろん，量子力学の教科書を書棚から探すまでもなく，エルミート多項式が満たす 3 項間漸化式

$$\lambda\,H_n(\lambda) = \frac{1}{2}H_{n+1}(\lambda) + n\,H_{n-1}(\lambda)$$

((3.21) と同値)，および微分関係式

$$\frac{d}{d\lambda}H_n(\lambda) = 2n\,H_{n-1}(\lambda)$$

から上式は示される．以下では (4.2) のみを用いて，種々の熱力学極限

$(N \to \infty)$ におけるエルミートカーネル (3.20) や固有値密度 (3.24)[*1] の漸近形を導出する．

4.2 ウィグナーの半円則

シュレーディンガー方程式 (4.2) に従う調和振動子の古典的運動範囲は，ポテンシャル $\left(\frac{1}{2}\lambda^2\right) \le$ 全エネルギー $\left(N+\frac{1}{2}\right)$ となる領域 $|\lambda| \le \sqrt{2N+1}$ である．古典的禁止領域の遠方 $|\lambda| \gg \sqrt{2N}$ で波動関数 $\psi_N(\lambda)$ は急速に 0 に収束し，固有値密度 $K_N(\lambda, \lambda)$ も同様であるから，固有値 λ の典型的オーダーは $O(\sqrt{N})$ であることが何らの計算無しにわかる．従って熱力学極限における大局的な固有値密度を得るためには，固有値 λ を

$$\lambda = \sqrt{N}x, \quad x = O(1) \tag{4.3}$$

とスケールしてから $N \to \infty$ 極限をとればよい．このとき次の定理が成り立つ．

定理 4.1（ウィグナーの半円則） GUE の固有値密度 $\rho_N(\lambda)$ は，スケーリング変数 $x = N^{-1/2}\lambda$ を固定した極限 $N, \lambda \to \infty$ において

$$\bar{\rho}(x) := \lim_{N\to\infty} \frac{\rho_N(\sqrt{N}x)}{\sqrt{N}} = \begin{cases} \pi^{-1}\sqrt{2-x^2} & (|x| \le \sqrt{2}) \\ 0 & (|x| > \sqrt{2}) \end{cases} \tag{4.4}$$

に漸近する．

[証明] スケーリング変数 x の関数としての第 N および $N-1$ 励起状態の波動関数を

$$\varphi_+(x) = \psi_N(\sqrt{N}x), \quad \varphi_-(x) = \psi_{N-1}(\sqrt{N}x)$$

と表記すると，(4.2) は

$$\frac{1}{N^2}\frac{d^2\varphi_\pm(x)}{dx^2} = -\left(2 \pm \frac{1}{N} - x^2\right)\varphi_\pm(x) \tag{4.5}$$

となる．上式左辺の $1/N$ は丁度シュレーディンガー方程式における $\hbar$ の役割をしているから，ランダム行列の熱力学極限 $N \gg 1$ は，その固有値を座標とする調和振動子における半古典極限 $\hbar \ll 1$ に対応することになる．半古典極限における波動関数の漸近形は，次のヴェンツェル–クラマース–ブリリュアン (WKB) 近似ないし鞍点法として量子力学の草創期より利用されている．

補題 4.1（WKB 近似） ある区間上で定義された実関数 $p(x)$ が，根 c を境

*1） これらの 2 式が有限 N での表式であることを明示するため，(3.20) と (3.24) を以下では $K_N(\lambda, \lambda')$, $\rho_N(\lambda)$ と表記する．

にして $p(x) > 0$ $(x < c)$, < 0 $(x > c)$ とする．このとき 2 階線形微分方程式

$$\hbar^2 \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -p(x)^2\varphi(x) \tag{4.6}$$

の解の基本系は，$\hbar \ll 1$ のとき漸近的に

$$p(x)^{-1/2} \exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}\int^x dy\, p(y)\right) \quad (x \ll c), \tag{4.7}$$

$$|p(x)|^{-1/2} \exp\left(\pm\frac{1}{\hbar}\int^x dy\, |p(y)|\right) \quad (x \gg c). \tag{4.8}$$

なお上式中の積分の下限が異なる 2 つの解は定数倍のみ異なるため，下限は任意に設定してよい．

仮に N を偶数とすると，エルミート多項式の偶奇性から $\varphi_+(x)$ は偶関数，$\varphi_-(x)$ は奇関数である．したがって (4.5) の解である両者の $|x| < \sqrt{2} - O(N^{-1})$ における漸近形は，積分の下限を 0 とした (4.7) 式の 2 解の和と差をとって

$$\varphi_\pm(x) \propto \frac{1}{(2-x^2)^{1/4}} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left(N\int_0^x dy\sqrt{2 \pm \frac{1}{N} - y^2}\right)$$

となる（複合同順）．N が奇数の場合には cos と sin が入れ替わるのみで以下の計算は同様．なお分母中の $\pm 1/N$ は WKB 近似では無視した高次の項であるから落とした．また分子の積分中の $\pm 1/N$ は 1 次まで展開して

$$\varphi_\pm(x) \propto \frac{1}{(2-x^2)^{1/4}} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left(N\int_0^x dy\sqrt{2 - y^2} \pm \int_0^x \frac{dy}{2\sqrt{2-y^2}}\right)$$

となる．これらを (3.24) に代入して微分を実行すると，$N \gg 1$ での主要項は

$$\bar{\rho}(x) \propto N \cos\left(\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{2-y^2}}\right) = N\sqrt{\frac{2-x^2}{2}}. \tag{4.9}$$

一方，固有値密度の定義から従う規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_N(\lambda)d\lambda = N \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\rho}(x)dx = 1 \tag{4.10}$$

から，$|x| > \sqrt{2}$ において $\varphi_\pm(x)$ は収束せねばならず，従って漸近解 (4.8) のうち減衰する指数関数解のみが許される．これらを (3.20) に代入して定理での極限をとると，この領域において $\bar{\rho}(x) = 0$ となることがわかる．(4.9) における比例係数は規格化条件 (4.10)，$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \bar{\rho}(x)dx = 1$ から $\sqrt{2}/\pi N$ と決定される．□

半円則の証明には，上に紹介したエルミート多項式の漸近形を用いる手法の他にも，ヒルベルト変換，シュヴィンガー–ダイソン方程式，非線形 σ 模型のレプリカ法（第 6 章）を用いる方法などが知られている．また，半円則は GUE

に固有な特性ではなく，H の行列要素が独立な確率変数であり，各々の分布関数の平均 $(=0)$ と分散が共通である場合に成立することがウィグナーらにより示されている．従って，各行列要素が 2 値 $H_{ij} = H_{ji} = \pm 1$ を等確率でとる実対称行列集団や，ガウス型直交およびシンプレクティック集団 (GOE, GSE) はこの条件を満たしており，その大域的固有値密度は同じく半円則に従う．

ウィグナーの半円則の系としては，確率測度 $\mathcal{Z}^{-1}(dH)\ \mathrm{e}^{-\operatorname{tr} H}$ に従って分布する正定値複素行列（ラゲール型集団）の大域的固有値密度があげられる．重み $\mathrm{e}^{-\lambda}$ で直交するラゲール多項式 (3.26) から構成される ψ_N, ψ_{N-1} に対して，定理 3.1 と同様の漸近評価を行うことにより次の結果が従う：

定理 4.2（マルチェンコ–パスツール則） LUE の固有値密度 $\rho_N(\lambda)$ は，指数 α およびスケーリング変数 $x = N^{-1}\lambda$ を固定した極限 $N, \lambda \to 0$ において

$$\bar{\rho}(x) := \lim_{N\to\infty} \rho_N(Nx) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4-x}{x}} & (0 \le x \le 4) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{4.11}$$

に漸近する．

上の定理において，ラゲール型からカイラルガウス型への変数変換 $x \mapsto y = \sqrt{x}$ を行うと，カイラルガウス型集団の大局的固有値密度がやはり半円則 $\pi^{-1}\sqrt{4-y^2}$ に従うことがいえる．

4.3 バルク

半円則 (4.4) を元の固有値変数 λ で表すと $\rho(\lambda) \sim \pi^{-1}\sqrt{2N-\lambda^2}$ となる．このことは，スペクトル中のある点 $\bar{\lambda}$ を含む，十分に狭いが多数の固有値を含むウィンドウをとったとき，その中の固有値の平均間隔 $\bar{\Delta}$ が

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{\rho(\bar{\lambda})} \sim \frac{\pi}{\sqrt{2N-\bar{\lambda}^2}}$$

であることと等価である．ただし $\bar{\lambda}$ はスペクトル端 $\pm\sqrt{2N}$ より十分内側にあり，$\bar{\Delta} = O(N^{-1/2})$ とする．このウィンドウ中での固有値の局所的相関を調べるためには，固有値変数 λ の代わりに $\bar{\Delta}$ で規格化（アンフォールド）した変数

$$x = \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{\bar{\Delta}} \tag{4.12}$$

を用いる．このとき，隣接する 2 つの固有値 $\cdots \le \lambda_n \le \lambda_{n+1} \le \cdots$ に対して，規格化された固有値の間隔 $x_{n+1} - x_n$ の期待値は 1 となる．x を $O(1)$ に保ちつつ，熱力学極限 $N \to \infty$ をとることをバルクスケーリング極限と呼ぶ．

定理 4.3（正弦カーネル） 極限 $N \to \infty$，$\lambda, \lambda' \to \bar{\lambda}$，$x, x' = O(1)$ において エルミートカーネル $K_N(\lambda, \lambda')$ は，

$$\lim_{N\to\infty} K_N(\bar{\lambda}+x\bar{\Delta},\ \bar{\lambda}+x'\bar{\Delta})\bar{\Delta} = \frac{\sin\pi(x-x')}{\pi(x-x')} := K_{\sin}(x-x') \quad (4.13)$$

に漸近する．

［証明］簡単のためウィンドウの位置を半円の中央 $\bar{\lambda}=0$ に選び，シュレーディンガー方程式 (4.2) に $\lambda = x\bar{\Delta} = \pi(2N)^{-1/2}x$ を代入する．今度は第 N および $N-1$ 励起状態の波動関数を

$$\varphi_+(x) = \psi_N(\pi(2N)^{-1/2}x), \quad \varphi_-(x) = \psi_{N-1}(\pi(2N)^{-1/2}x)$$

とおくと，$N \gg 1$ における (4.2) の主要項は

$$-\frac{N}{\pi^2}\frac{d^2}{dx^2}\varphi_\pm(x) = N\,\varphi_\pm(x) \quad (4.14)$$

となる．この微分方程式の偶・奇関数解は明らかに

$$\varphi_\pm(x) \propto \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \pi x \quad (4.15)$$

である．これらを (3.20) に代入すると，加法定理により

$$K_{\sin}(x,x') \propto \frac{\sin\pi(x-x')}{x-x'} \quad (4.16)$$

となる．アンフォールドした変数 x の関数としての固有値密度 $K_{\sin}(x,x)$ は構成により 1 であるから，(4.16) の比例係数は $1/\pi$ と決定される．ウィンドウを一般の $0<|\bar{\lambda}|<\sqrt{2N}$ に設定した場合にも，シュレーディンガー方程式の局所的漸近形が (4.14) になることは同様にして従う．□

その中での固有値密度が定数と見なし得るほど狭いウィンドウ中では，固有値変数に並進不変性が生じ，そのためカーネルの局所的漸近形 $K_{\sin}(x,x')$ (4.13) および局所的固有値相関関数 $\det[K_{\sin}(x_i,x_j)]_{i,j=1}^k$ が変数の差 x_i-x_j のみに依存することは予想された結果である．従って GUE のスペクトルバルクにおける非自明な固有値相関関数は 2 点関数（(3.16)）

$$R_2^{(\mathrm{conn})}(x-x') = -\left(\frac{\sin\pi(x-x')}{\pi(x-x')}\right)^2 \quad (4.17)$$

以上の多点関数となる．正弦カーネル (4.13) は重み関数 $\mathrm{e}^{-V(H)}$ の詳細によらずに従うことが，対応する直交多項式の漸近評価から示されており，クラス A の普遍性を特徴付けている[30]．

4.4 ソフトエッジ

次に，前節で除外したスペクトル端 $\bar{\lambda}=\pm\sqrt{2N}$ を含むウィンドウにおける固有値の局所的相関を求める．この位置は固有値を座標とする粒子系の立場か

らは古典力学では転回点，量子力学では波動関数の自由端反射点であり，以下ではソフトエッジ（柔らかい端点）と呼ぶ．単なる熱力学極限 $N \to \infty$（固有値を座標変数とする調和振動子の古典極限 $N^{-1} = \hbar = 0$）においては古典的禁止領域である $\lambda > \sqrt{2N}$ に粒子（固有値）は存在しないが，$\hbar$ を有限とする量子論では波動関数が禁止領域に染み出す．従って，自明でない固有値相関を得るためにはこの染み出しの幅 $\propto N^{-1/6}$ を単位として固有値変数 λ を計るように

$$x = \sqrt{2}N^{1/6}(\lambda - \sqrt{2N}) \tag{4.18}$$

とアンフォールド（右辺の係数 $\sqrt{2}$ は便宜上挿入した）すればよい．このスケーリング極限は，量子力学の観点からは古典的転回点の近傍での波動関数の局所的漸近形を求める問題に対応する．

定理 4.4（エアリーカーネル） 極限 $N \to \infty$，$\lambda, \lambda' \to \sqrt{2N}$，$x, x' = O(1)$ においてエルミートカーネル $K_N(\lambda, \lambda')$ は，

$$\lim_{N\to\infty} K_N\left(\sqrt{2N} + \frac{x}{\sqrt{2}N^{1/6}},\ \sqrt{2N} + \frac{x'}{\sqrt{2}N^{1/6}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}N^{1/6}}$$
$$= \frac{\mathrm{Ai}(x)\,\mathrm{Ai}(x') - \mathrm{Ai}(x)\,\mathrm{Ai}(x')}{x - x'} := K_{\mathrm{Ai}}(x, x') \tag{4.19}$$

に漸近する．ただし $\mathrm{Ai}(x)$ はエアリーの微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x\right)\varphi(x) = 0 \tag{4.20}$$

の解であって，境界条件

$$\varphi(x) \to x^{-1/4}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \quad (x \to +\infty) \tag{4.21}$$

によって一意的に決定される関数（エアリー関数）である．

[証明] シュレーディンガー方程式 (4.2) にスケーリング変数 (4.18) を代入する．再び第 N および $N-1$ 励起状態の波動関数のスケーリング極限を

$$\varphi_+(x) = \psi_N(\sqrt{2N} + 2^{-1/2}N^{-1/6}x),\quad \varphi_-(x) = \psi_{N-1}(\sqrt{2N} + 2^{-1/2}N^{-1/6}x)$$

とおくと，$N \gg 1$ での最主要項および副主要項は

$$-N^{1/3}\frac{d^2}{dx^2}\varphi_\pm(x) + N^{1/3}x\,\varphi(x) = \pm\frac{1}{2}\varphi_\pm(x) \tag{4.22}$$

となる．これを (4.20) と比較し，固有値が分布しない領域 $x \gg 1$ で $\varphi_\pm(x) \to 0$ となるべきことを考慮すると

$$\varphi_\pm(x) \propto \mathrm{Ai}\left(x \mp \frac{1}{2N^{1/3}}\right) \simeq \mathrm{Ai}(x) \mp \frac{1}{2N^{1/3}}\,\mathrm{Ai}'(x) \tag{4.23}$$

となる．これらを (3.20) に代入すると，比例係数を除いて (4.19) が得られる．

比例係数は，定義 (4.20) を用いてエアリーカーネルを別形

$$K_{\mathrm{Ai}}(x,x') = \int_0^\infty dy\ \mathrm{Ai}(x+y)\,\mathrm{Ai}(x'+y)$$

（この式は (3.3) に由来する）に表した上で，射影性 (3.9)

$$\int_{-\infty}^\infty dx'\, K_{\mathrm{Ai}}(x,x')K_{\mathrm{Ai}}(x',x'') = K_{\mathrm{Ai}}(x,x'')$$

およびエアリー関数の直交性（この式は波動関数の直交性 (3.2) に由来する）

$$\int_{-\infty}^\infty dy\ \mathrm{Ai}(x+y)\,\mathrm{Ai}(x'+y) = \delta(x-x')$$

を用いれば 1 であることが確認できる．□

特に，GUE のソフトエッジにおける固有値密度（3.2 節冒頭の式）は

$$\rho(x) = K_{\mathrm{Ai}}(x,x) = \mathrm{Ai}'(x)^2 - x\,\mathrm{Ai}(x)^2 \tag{4.24}$$

となる（図 2.1）．エアリーカーネル (4.19) もその波動関数の WKB 近似からの導出法から予想される通りに，重み関数 $\mathrm{e}^{-V(H)}$ の詳細によらずソフトエッジにおいて普遍的に成立することが証明されている[31]．

4.5 ラゲール型ユニタリー集団/ハードエッジ

確率測度 $\mathcal{Z}^{-1}(dH)\,(\det H)^\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tr}\,H}$ $(\alpha > -1)$ に従って分布する正定値 $N\times N$ 複素エルミート行列の集団をラゲール型ユニタリー集団 (LUE) と呼ぶ．LUE に限らず，ポテンシャル関数に無限に高い壁が存在する場合，固有値を座標とする粒子にとって壁の位置はソフトエッジと同様に古典的転回点ではあるが，量子的には波動関数が厳密に 0 となる固定端反射点であるから，これをハードエッジ（硬い端点）と呼んで区別する．LUE の固有値相関関数を司るカーネルは，重み $\lambda^\alpha\,\mathrm{e}^{-\lambda}$ で直交する一般化ラゲール多項式 $L_n^\alpha(\lambda)$ から作られる正規直交関数

$$\psi_n(\lambda) = (-1)^n\sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}}\,\lambda^{\alpha/2}\,\mathrm{e}^{-\lambda/2}\,L_n^\alpha(\lambda) \quad (\lambda \geq 0) \tag{4.25}$$

を (3.20) に代入して得られ，ラゲールカーネルと呼ばれる．量子力学を学んだ読者は再び，$\ell = (\alpha+1)/2$ と定義するとこの関数が主量子数 $n+\ell+1$，角運動量 ℓ をもつ水素型原子のシュレーディンガー方程式の動径部分

$$\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda} - \frac{\alpha^2}{4\lambda^2} + \frac{n+(\alpha+1)/2}{\lambda} - \frac{1}{4}\right)\psi_n(\lambda) = 0 \tag{4.26}$$

を満たす波動関数であることに気付くであろう．原点近傍を適切に拡大するためには，マルチェンコ–パスツール則 (4.11) から指定されるスケーリング変数

$$x = N^{-1}\lambda \tag{4.27}$$

を固定するアンフォールディングをすればよい．

定理 4.5（ベッセルカーネル） 極限 $N \to \infty$，$\lambda, \lambda' \to 0$，$x, x' = O(1)$ においてラゲールカーネル $K_N(\lambda, \lambda')$ は，

$$\lim_{N\to\infty} K_N\left(\frac{x}{N}, \frac{x'}{N}\right)\frac{1}{N} \tag{4.28}$$
$$= \frac{\sqrt{x}J_{\alpha+1}(2\sqrt{x})J_\alpha(2\sqrt{x'}) - J_\alpha(2\sqrt{x})\sqrt{x'}J_{\alpha+1}(2\sqrt{x'})}{x-x'} := K^{(\alpha)}_{\mathrm{Bessel}}(x, x')$$

に漸近する．ただし $J_\alpha(z)$ はベッセルの微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} - \frac{\alpha^2}{z^2} + 1\right) f(z) = 0 \tag{4.29}$$

の解であって，境界条件

$$f(z) \sim \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} z^\alpha \quad (z \to 0) \tag{4.30}$$

によって一意的に決定される関数（第 1 種ベッセル関数）である．

[証明] シュレーディンガー方程式 (4.26) にスケーリング変数 (4.27) を代入する．第 n 励起状態の波動関数のスケーリング極限を

$$\varphi(x) = \psi_n(Nx)$$

とおくと，$N, n \gg 1, u := n/N = O(1)$ での主要項は

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\alpha^2}{4x^2} + \frac{u}{x}\right)\varphi(x) = 0 \tag{4.31}$$

となる．これを (4.29) と比較すると $\varphi(x)$ の基本解は $J_\alpha(2\sqrt{ux})$ と $Y_\alpha(2\sqrt{ux})$ であるが，定義 (4.25) から従う条件 $\varphi(x) \sim x^{\alpha/2}$ $(x \ll 1)$ を満たす解は $J_\alpha(2\sqrt{ux})$ であり，$\psi_N(Nx)$ と $\psi_{N-1}(Nx)$ の漸近系はともに

$$\psi_\pm(x) = \psi_N(Nx),\ \psi_{N-1}(Nx) \propto J_\alpha(2\sqrt{x}) \tag{4.32}$$

となる．また

$$\psi_N(Nx) - \psi_{N-1}(Nx) \propto \left.\frac{d}{du}J_\alpha(2\sqrt{ux})\right|_{u=1} = \sqrt{x}J'_\alpha(2\sqrt{x}) \tag{4.33}$$

であるから，関数等式 $J'_\alpha(z) = -J_{\alpha+1}(x) + (\alpha/z)J_\alpha(z)$ を用いれば比例係数を除いて (4.28) が得られる．比例係数は，ベッセルカーネルを別形

$$K^{(\alpha)}_{\mathrm{Bessel}}(x, x') = \int_0^1 du\, J_\alpha(2\sqrt{ux})J_\alpha(2\sqrt{ux'})$$

（この式は (3.3) に由来する）に表した上で，射影性 (3.9)

$$\int_0^\infty dx'\, K^{(\alpha)}_{\mathrm{Bessel}}(x, x')K^{(\alpha)}_{\mathrm{Bessel}}(x', x'') = K^{(\alpha)}_{\mathrm{Bessel}}(x, x'')$$

およびベッセル関数の直交性（この式は波動関数の直交性 (3.2) に由来する）

$$\int_0^\infty dx\, J_\alpha(2\sqrt{ux})J_\alpha(2\sqrt{vx}) = \delta(u-v)$$

を用いれば 1 であることが確認できる．□

特に，LUE のハードエッジにおける固有値密度（3.2 節冒頭の式）は

$$\rho(x) = K^{(\alpha)}_{\mathrm{Bessel}}(x,x) = J_\alpha(2\sqrt{x})^2 - J_{\alpha+1}(2\sqrt{x})J_{\alpha-1}(2\sqrt{x}) \tag{4.34}$$

となる．ベッセルカーネル (4.28) についても，重み $\mathrm{e}^{-V(H)+\alpha\log H}$ 中の関数 $V(H)$ の詳細によらずハードエッジ $x=0$ において普遍的に成立することが予想され[32]，後に厳密に証明されている[33]．

(2.29) 式によると，LUE の固有値分布関数はカイラル型クラス AIII の非零固有値の分布関数 (2.26), (2.27) において $v(H^2)=H^2$（ガウス型），$\nu = N'-N = \alpha$ とおいたものと 2 乗写像を通じて等価になる．従って chGUE の原点近傍での固有値相関関数を司るカーネルは LUE のハードエッジでのベッセルカーネルに変数変換 $\zeta = 2\sqrt{x}$ を行うことにより得られる：

$$K^{(\nu)}_{\mathrm{chiral}}(\zeta,\zeta') = \sqrt{\zeta\zeta'}\,\frac{\zeta J_{\nu+1}(\zeta)J_\nu(\zeta') - J_\nu(\zeta)\zeta' J_{\nu+1}(\zeta')}{\zeta^2-\zeta'^2}. \tag{4.35}$$

上の変換の規格化定数は，chGUE の原点近傍における固有値密度

$$\rho(\zeta) = K^{(\nu)}_{\mathrm{chiral}}(\zeta,\zeta) = \frac{\zeta}{2}\left(J_\nu(\zeta)^2 - J_{\nu+1}(\zeta)J_{\nu-1}(\zeta)\right) \tag{4.36}$$

が遠方 ($\zeta \gg 1$) で $1/\pi$ となるように選んだ（図 4.1）．

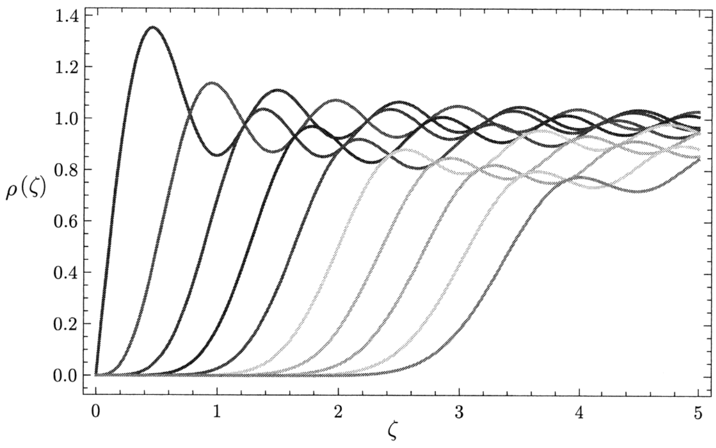


図 4.1 カイラルガウス型ユニタリー集団の固有値密度 $\rho(\lambda)$．[左から $\nu = 0, 1, \ldots, 9$]*2)．

---

*2) 図では平均密度が 1 となるように縦・横軸を $\pi^{\pm 1}$ 倍した．図 4.3 中・下および図 7.12, 7.13 も同様．

4.6 カーネルの退化

前節までに，ユニタリー集団のスペクトルの中央部（バルク）および端点（ソフトエッジ，ハードエッジ）の近傍における直交多項式の漸近形から，固有値の相関を司る 3 種類のカーネル（正弦，エアリー，ベッセル）を導出した．いずれかの端点からスペクトルバンドの内部に深く入れば端点の影響は無視できるようになり，エアリーカーネルないしベッセルカーネルは並進不変な正弦カーネルに退化すると直観的に考えられる．(4.20) および (4.31) のそれぞれにおいて

$$x = -c + \frac{\pi}{\sqrt{c}}X \text{（ソフトエッジ）}, \quad x = c + \pi\sqrt{c}X \text{（ハードエッジ）} \tag{4.37}$$

とおき，端点近傍の領域中の基準点である $\mp c$ の絶対値を大きくすると両式の主要項はともに

$$\left(\frac{1}{\pi^2}\frac{d^2}{dX^2} + 1\right)\phi(X) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(X) \propto \sin(\pi X + \text{const.}) \tag{4.38}$$

となることからも上の事実は予想される．より厳密に扱うには，エッジでのカーネル中の 2 変数にこの操作を行うことにより以下の定理が示される：

定理 4.6（エッジ→バルク遷移） 固有値分布端におけるカーネルにスケーリング変数 (4.37) を代入して $c \to \infty$ 極限をとるとき，

$$K_{\mathrm{Ai}}(x, x')dx,\ K_{\mathrm{Bessel}}^{(\alpha)}(x, x')dx \to K_{\sin}(X, X')dX.$$

一方，ハードエッジにおいて指数 α をもスケーリングさせることにより，ソフトエッジを漸近的に現出させることもできる．実際に，ベッセルの微分方程式 (4.31)（簡単のため $u = 1$ とする）に

$$x = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{4/3} X \tag{4.39}$$

を代入すると $\alpha \gg 1$ での主要項としてエアリーの微分方程式 (4.20) が得られることから上の事実が予想される．ベッセルカーネル中の 2 変数にこの操作を行うことにより，以下の定理が得られる[34]：

定理 4.7（ハードエッジ→ソフトエッジ遷移） 指数 α をもつベッセルカーネルにスケーリング変数 (4.39) を代入して $\alpha \to \infty$ 極限をとるとき，

$$K_{\mathrm{Bessel}}^{(\alpha)}(x, x')dx \to K_{\mathrm{Ai}}(X, X')dX. \tag{4.40}$$

上記 2 つの定理のおかげで，ユニタリー集団の固有値の相関関数や分布関数の種々の性質はベッセルカーネルについて示せば十分であり，他の場合はそれからスケーリング極限 (4.37) ないし (4.39) をとることにより自動的に得られることになる．

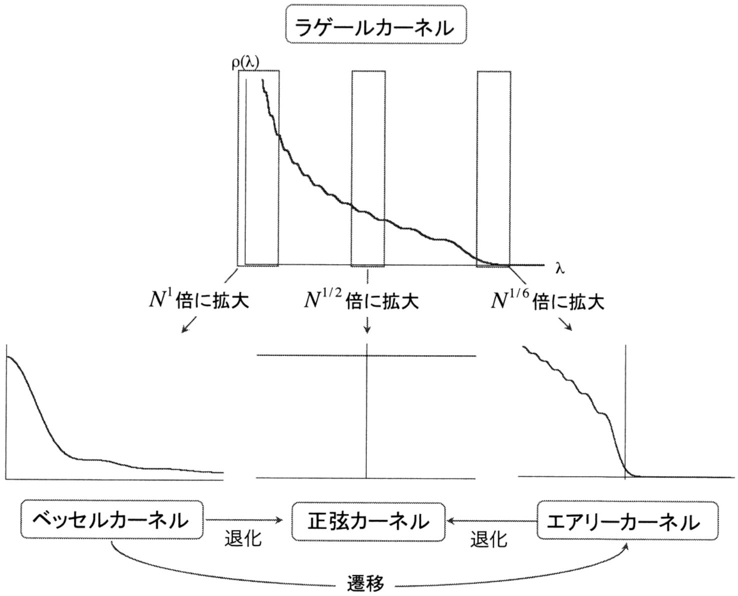


図 4.2 カーネルの退化系列と対応する固有値密度．有限 N に対するラゲールカーネル (3.29) は両端およびバルクでの局所的スケーリング極限によりベッセル (4.28)，エアリー (4.19)，および正弦カーネル (4.13) に帰着する．三者の間にはベッセルカーネルを頂点とする退化関係が存在する．

4.7 シンプレクティック集団・直交集団

前節において，ユニタリー集団 ($\beta = 2$) の固有値の局所的スケーリング極限での統計的挙動が対応する直交関数 $\psi_n(\lambda)$ の漸近形によって決定されることを見てきた．ガウス型シンプレクティック集団 ($\beta = 4$)・直交集団 ($\beta = 1$) の 4 元数カーネル要素 $S_{4,1}(\lambda, \lambda')$ はガウス型ユニタリー集団の直交関数とカーネルから構成されるので，前者のスケーリング極限は $\psi_n(\lambda)$ の局所的漸近形から決定される．バルクにおける漸近形 (4.15) およびソフトエッジにおける漸近形 (4.23) を (3.63) と (3.65) に代入し，前者においては $R_1(x) = 1$ と規格化することにより，直ちに以下の定理が得られる．

定理 4.8（正弦 4 元数カーネル） 極限 $N \to \infty$，$\lambda, \lambda' \to \bar{\lambda}$，$x, x' = O(1)$ において 4 元数エルミートカーネル要素 $S_{\beta,N}(\lambda, \lambda')$ は

$$S_\beta(x, x') := \lim_{N\to\infty} S_{\beta,N}(\bar{\lambda} + x\bar{\Delta},\ \bar{\lambda} + x'\bar{\Delta})\bar{\Delta}$$
$$= \begin{cases} K_{\sin}(2x, 2x') & (\beta = 4) \\ K_{\sin}(x, x') & (\beta = 1) \end{cases} \tag{4.41}$$

に漸近する．

定理 4.9（**エアリー 4 元数カーネル**）　極限 $N \to \infty$，$\lambda, \lambda' \to \sqrt{2N}$，$x, x' = O(1)$ において 4 元数エルミートカーネル要素 $S_{\beta,N}(\lambda, \lambda')$ は

$$S_\beta(x, x') := \lim_{N\to\infty} S_{\beta,N}\left(\sqrt{2N} + \frac{x}{\sqrt{2}N^{1/6}}, \sqrt{2N} + \frac{x'}{\sqrt{2}N^{1/6}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}N^{1/6}}$$
$$= \begin{cases} K_{\mathrm{Ai}}(2x, 2x') - \mathrm{Ai}(2x') \displaystyle\int_x^\infty \mathrm{Ai}(2y)dy & (\beta = 4) \\ K_{\mathrm{Ai}}(x, x') + \dfrac{1}{2}\mathrm{Ai}(x')\left(1 - \displaystyle\int_x^\infty \mathrm{Ai}(y)dy\right) & (\beta = 1) \end{cases} \tag{4.42}$$

に漸近する．

同様に，ラゲール型シンプレクティック集団・直交集団の 4 元数カーネル要素 $S_\beta(\lambda, \lambda')$ はラゲール型ユニタリー集団の直交関数とカーネルから構成されるので，前者のスケーリング極限は $\psi_n(\lambda)$ のハードエッジにおける漸近形 (4.32), (4.33) を (3.64) と (3.66) に代入し，$R_1(x) \sim 1/(2\pi\sqrt{x})$ $(x \gg 1)$ と規格化することにより，直ちに以下の定理が得られる．

定理 4.10（**ベッセル 4 元数カーネル**）　極限 $N \to \infty$，$\lambda, \lambda' \to 0$，$x, x' = O(1)$ において 4 元数ラゲールカーネル要素 $S_{\beta,N}(\lambda, \lambda')$ は

$$S_\beta(x, x') := \lim_{N\to\infty} S_{\beta,N}\left(\frac{x}{N}, \frac{x'}{N}\right)\frac{1}{N}$$
$$= \begin{cases} 2\sqrt{\dfrac{x}{x'}} K_{\mathrm{Bessel}}^{(2\alpha-1)}(4x, 4x') + \dfrac{J_{2\alpha-1}(2\sqrt{x'})}{2\sqrt{x'}} \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^\infty dt\, J_{2\alpha-1}(2t) & (\beta = 4) \\ \sqrt{\dfrac{x}{x'}} K_{\mathrm{Bessel}}^{(\alpha+1)}(x, x') + \dfrac{J_{\alpha+1}(2\sqrt{x'})}{4\sqrt{x'}}\left(1 - \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} dt\, J_{\alpha+1}(t)\right) & (\beta = 1) \end{cases} \tag{4.43}$$

に漸近する．

なお上の 3 種類のスケーリング極限における準位密度の計算には，他の 4 元数カーネル要素のスケーリング極限 $D_{4,1}$, $\bar{I}_{4,1}$ は $S_{4,1}$ から (3.36) により

$$D_4(x, x') = \frac{\partial}{\partial x} S_4(x, x'), \quad I_4(x, x') = \int_{x'}^x S_4(x, y)dy,$$
$$D_1(x, x') = \frac{\partial}{\partial x} S_1(x, x'), \quad \bar{I}_1(x, x') = \int_{x'}^x S_1(x, y)dy - \epsilon(x - x') \tag{4.44}$$

によって与えられる．最小の k をもつ非自明な相関関数である $R_2^{(\mathrm{conn})}(x - x') = R_2^{(\mathrm{conn})}(x, x')$（バルク）および $\rho(x) = R_1(x)$（エッジ）は上の 4 元数カーネル要素を (3.49) および (3.50) に代入して，

バルク： (4.45)

$$R_2^{(\mathrm{conn})}(x) = \begin{cases} -\left(\dfrac{\sin 2\pi x}{2\pi x}\right)^2 + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\sin 2\pi x}{2\pi x}\right)\displaystyle\int_0^x dy \dfrac{\sin 2\pi y}{2\pi y} \\ (\beta = 4) \\ -\left(\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}\right)\displaystyle\int_x^\infty dy \dfrac{\sin \pi y}{\pi y} \\ (\beta = 1) \end{cases}$$

ソフトエッジ： (4.46)

$$\rho(x) = \begin{cases} \mathrm{Ai}'(2x)^2 - 2x\,\mathrm{Ai}(2x)^2 - \mathrm{Ai}(2x)\displaystyle\int_x^\infty \mathrm{Ai}(2y)dy & (\beta = 4) \\ \mathrm{Ai}'(x)^2 - x\,\mathrm{Ai}(x)^2 + \dfrac{1}{2}\mathrm{Ai}(x)(1 - \displaystyle\int_x^\infty \mathrm{Ai}(y)dy) & (\beta = 1) \end{cases}$$

ハードエッジ： (4.47)

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(J_{2\alpha-1}(2\sqrt{x})^2 - J_{2\alpha}(2\sqrt{x})J_{2\alpha-2}(2\sqrt{x})\right) \\ +\dfrac{J_{2\alpha-1}(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^\infty dt\, J_{2\alpha-1}(2t) & (\beta = 4) \\ \dfrac{1}{4}\left(J_{\alpha+1}(\sqrt{x})^2 - J_{\alpha+2}(\sqrt{x})J_{\alpha}(\sqrt{x})\right) \\ +\dfrac{J_{\alpha+1}(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}\left(1 - \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} dt\, J_{\alpha+1}(t)\right) & (\beta = 1) \end{cases}$$

となる（ハードエッジについてはベッセル関数等式を用いて簡略化した）.

4.8 フレドホルム行列式の数値評価

それぞれの普遍性クラスに属する不変ランダム行列集団，および 7.8 節で紹介する普遍性クラスを内挿するランダム行列集団の固有値は全て（4 元数）行列式プロセスに従う．このため，区間 I に正確に k 個の固有値を含む確率 $E_k(I)$ はスカラーカーネルないし 2×2 行列カーネルのフレドホルム行列式とトレースで表される．個々のカーネル（有限 N ないしスケーリング極限）のフレドホルム行列式は，随伴するパンルヴェ超越方程式の解を用いて解析的に表せることが知られている[35]．本節では次の定理のおかげで単純ながら精密な数値計算に適しており，汎用性が広い区分求積法による評価を，証明を付さずに紹介する.

定理 4.11（**ニュストレーム型法**[36]） $\{x_1, \ldots, x_m; w_1, \ldots, w_m\}$ を，区間 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ に対する μ 次の求積法（quadrature）とする*3)：

*3） 任意の $(\mu - 1)$ 次の多項式 f に対して (4.48) の左辺が厳密値を与えるとき，μ を求積法の次数と呼ぶ.

$$\sum_{i=1}^{m} f(x_i)w_i \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)dx \quad (f \in C[a,b]). \tag{4.48}$$

複素平面上で a, b を焦点とし長軸・短軸の長さが R, r である楕円を $\mathcal{E}$ とし，K を $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ 上で有界かつ正則な関数とする．このとき $m \times m$ 行列式

$$d_m(\xi) := \det(I_m - K_m), \quad K_m = \left[K(x_i, x_j)\sqrt{w_i w_j}\right]_{i,j=1}^{m} \tag{4.49}$$

は $m \to \infty$ において $\mathrm{Det}(\mathbb{I} - \hat{K}|_I)$ に一様収束し，その絶対誤差は (μ によらない定数) $\times \rho^{-\mu}$ で抑えられる．ここで $\rho = \sqrt{\frac{R+r}{R-r}}$ である．

なお，レゾルベントの冪についても同じ絶対誤差で

$$\mathrm{tr}(K_m(I_m - K_m)^{-1})^n \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Tr}(\hat{K}|_I(\mathbb{I} - \hat{K}|_I)^{-1})^n = T_n \tag{4.50}$$

に収束する．区間 I の均等 m 分割によるフレドホルム行列式の近似値が厳密値に局所的一様収束すること自体は 1 世紀以上前にヒルベルトによって証明されているが，この場合には m に関する指数的収束性は保証されない．最も古典的なガウス–ルジャンドル求積法では線形写像により区間 $[a, b]$ を $[-1, 1]$ に規格化したうえで m 次のルジャンドル多項式の零点を代表点 $\{x_i\}_{i=1}^{m}$ として用い，その次数は $\mu = m$ である．これを用いると，指数的収束性 [誤差 $O(\rho^{-m})$] のため小さい m に対しても近似式 (4.49) は極めて優れた精度をもつ*4)．上の定理は K が 2×2 行列値であっても成立するが，直交集団の 4 元数カーネル $\boldsymbol{K}_1$ についてはその $\tilde{I}_1(\lambda, \lambda')$ 成分が不連続な符号関数 $\mathrm{sgn}(\lambda - \lambda')$ を含み正則性を欠くため，指数的収束性は保証されないことに注意しなければならない．

この区分求積法により数値的に求めた，ユニタリー集団（4.2 節），カイラルユニタリー集団（4.5 節），およびカイラルシンプレクティック集団（4.7 節）の個別固有値分布 (2.38) を図 4.3 に例示する．

演習問題

4.1　ヤコビ型ユニタリー集団のカーネル（演習問題 3.3）は，$\lambda = 1$ 近傍におけるスケーリング極限においてベッセルカーネル (4.28) に帰着することを示せ．

4.2　ベッセルの微分方程式 (4.31) は，(4.39) および (4.37) の極限においてそれぞれ，エアリーおよび楕円型の微分方程式 (4.20), (4.38) に退化することを示せ．

---

*4)　わずか $m = 5$ 次のガウス–ルジャンドル求積法ですら，正弦カーネル (4.13) に対して 15 桁まで正確に $E_0[0, 0.1] = 0.900027271798259\cdots$ を与える[36]．

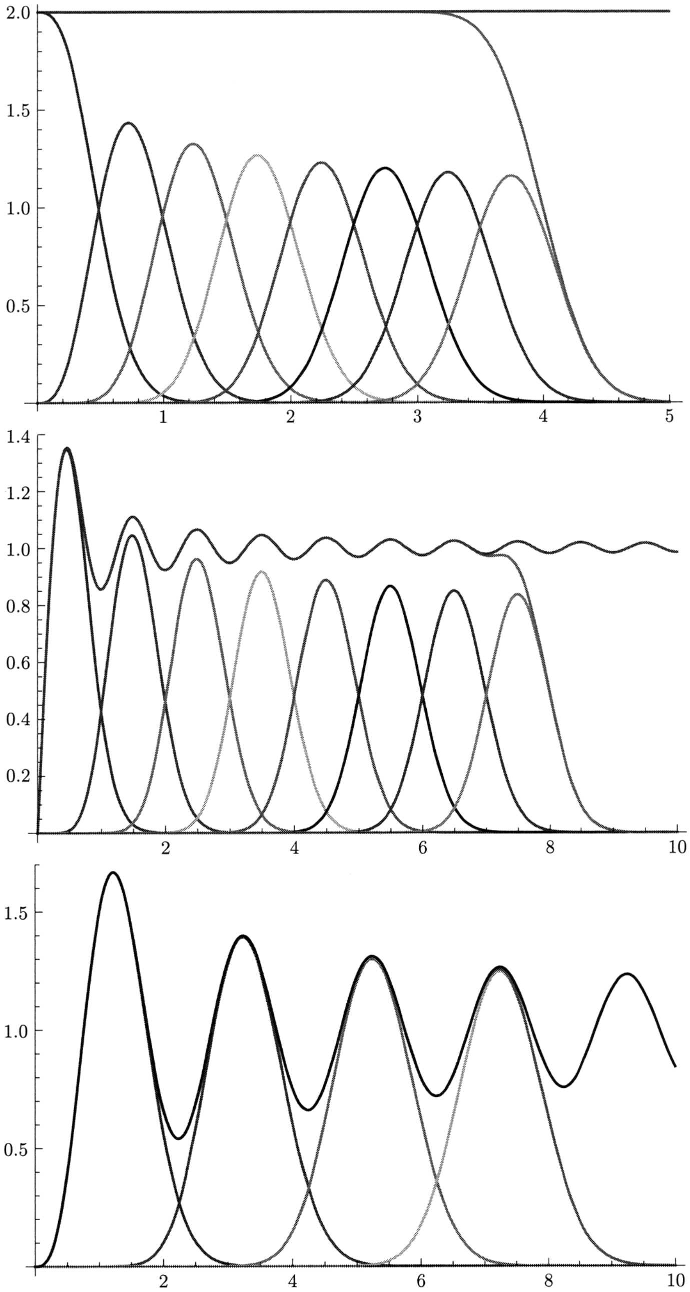


図 4.3 ガウス型集団 [上：$\beta = 2$] およびカイラルガウス型集団 [中: $\beta = 2$, 下: $\beta = 4$] の $k = 1, \ldots, 8$ 番目の小固有値分布 $p_k^{(\min)}(x)$，それらの総和 $\sum_{k=1}^{8} p_k^{(\min)}(x)$，および固有値密度 $\rho(x)$.

第 5 章
レプリカ法と非線形 $\boldsymbol{\sigma}$ 模型

本章では直交多項式法とは独立な準位相関関数の計算手法である非線形 σ 模型法について解説する．直交多項式法は任意の k 点相関関数およびギャップ確率に対する統一的な表示を与えるがその適用範囲は不変ランダム行列に限られるのに対し，非線形 σ 模型法では各準位統計関数を個別に計算する必要があるがより広範な乱雑系に適用でき，微視的なハミルトニアンとランダム行列を結びつけるという点において，両者は相補的である．また，後者を通じて準位統計の普遍性の起源が「レプリカ対称性の自発的破れ」にあることが明確になる．

5.1　ハバード–ストラトノビッチ変換

非線形 σ 模型法の技術的主眼は，以下に述べる変換によって大ランクの行列変数に渉る平均操作を別の小ランクの行列変数に渉る平均操作に置き換える点にある．ここでは例として正方カイラルガウス型ユニタリー集団 (chGUE) の 1 点関数（準位密度）を考えるが，以下の手法は 2.2 節**分類 2** の他の場合および k 点関数にも拡張できる．

σ 模型法の出発点は，恒等式（ϵ は正の微小量，P はコーシーの主値）

$$\frac{1}{x_-} := \frac{1}{x - i\epsilon} = \frac{x}{x^2+\epsilon^2} + i\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \to P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x) \tag{5.1}$$

である．従って準位密度はレゾルベント $G(z) := \left\langle \mathrm{tr}(z - iH)^{-1} \right\rangle$ から*1)

$$\rho(\lambda) = \langle \mathrm{tr}\,\delta(\lambda - H)\rangle = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\,G(i\lambda_-) \tag{5.2}$$

により与えられる．ここで $\langle\cdots\rangle$ は確率密度 (2.27) による期待値を表す．レゾルベントは特性多項式の n 次のモーメント $\langle \det(z-iH)^n\rangle$ から形式的に

$$G(z) = \lim_{n\to 0}\frac{1}{n}\frac{d}{dz}\langle \det(z-iH)^n\rangle \tag{5.3}$$

*1)　第 7 章と記号を揃える便宜上，H ではなく iH とした．

により得られるので，連続変数 n に対して後者を評価できればよい．

冪零性 $\psi^2 = 0$ をもつグラスマン数 ψ の積分は，並進不変性 $\int d\psi\, f(\psi) = \int d\psi\, f(\psi+\alpha)$ を要求すると一意的に $\int d\psi = 0$，$\int d\psi\,\psi = 1$ と決定される（第 2 式は規格化）．これから従う 2 つの独立なグラスマン数 $\psi, \bar{\psi}$ に対するガウス積分公式

$$\int d\psi d\bar{\psi}\ \mathrm{e}^{\bar{\psi}A\psi} = A \tag{5.4}$$

を行列 A_{ij} に対して拡張した

$$\int \prod_k d\psi_k d\bar{\psi}_k\ \mathrm{e}^{\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j} = \det A \tag{5.5}$$

から，行列 $z - iH = z - i\begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^\dagger & 0 \end{pmatrix}$，$Z \in \mathbb{C}^{N'\times N}$ の行列式は N' 成分グラスマン数 $\bar{\psi}_i, \psi_j$ $(i,j = 1,\ldots,N')$ および N 成分グラスマン数 $\bar{\chi}_k, \chi_l$ $(k,l = 1,\ldots,N)$ を用いて

$$\det\left[z - i\begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^\dagger & 0 \end{pmatrix}\right] = \int \prod_i d\psi_i d\bar{\psi}_i \prod_k d\chi_k d\bar{\chi}_k \times$$
$$\exp\left\{ \begin{pmatrix} \bar{\psi}_i & \bar{\chi}_k \end{pmatrix} \left[z\begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{kl} \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 & Z_{il} \\ Z^\dagger_{kj} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_j \\ \chi_l \end{pmatrix} \right\} \tag{5.6}$$

と表される．さらに $n \in \mathbb{N}$ のとき，行列式の n 次の冪は各グラスマン数を n 種類に拡張した ψ_i^a $(a = 1,\ldots,n)$ などにより

$$\det\left[z - i\begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^\dagger & 0 \end{pmatrix}\right]^n = \int \prod_{i,a} d\psi_i^a d\bar{\psi}_i^a \prod_{k,a} d\chi_k^a d\bar{\chi}_k^a \times$$
$$\exp\left\{ \begin{pmatrix} \bar{\psi}_i^a & \bar{\chi}_k^a \end{pmatrix} \left[z\begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{kl} \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 & Z_{il} \\ Z^\dagger_{kj} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_j^a \\ \chi_l^a \end{pmatrix} \right\} \tag{5.7}$$

とすればよい．上式の指数中，n 種のグラスマン数の添字 $a = 1,\ldots,n$ は対角的に入っており単に複製（レプリカ）を n 個用意したにすぎない．n を自然数に限ったために最終的に (5.3) において $n \to 0$ 極限をとる処方は曖昧になったが，この点は後で議論する．ガウス型集団 $v(\lambda) = \lambda$ について上の量を (2.26) により平均操作をとるには $N \times N$ 複素積分変数 Z_{ik} についてのガウス型積分（平方完成）を実行すればよく，

$$\Xi_n(z) := \left\langle \det\left[z - i\begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^\dagger & 0 \end{pmatrix}\right]^n \right\rangle \tag{5.8}$$
$$= \int \prod_{i,a} d\psi_i^a d\bar{\psi}_i^a \prod_{k,a} d\chi_k^a d\bar{\chi}_k^a \exp\left\{ z\left(\bar{\psi}_i^a\psi_i^a + \bar{\chi}_k^a\chi_k^a\right) - \bar{\psi}_i^a\chi_k^a\bar{\chi}_k^b\psi_i^b \right\}$$

となる．上式に現れたグラスマン数の 4 次の項は順番を入れ替えて

$$-\bar{\psi}_i^a \chi_k^a \bar{\chi}_k^b \psi_i^b = \bar{\psi}_i^a \psi_i^b \bar{\chi}_k^b \chi_k^a$$

とすれば i, k 型の添字と a, b 型の添字が変数の読み替え $\chi \mapsto i\psi, \psi \mapsto i\chi$ 後に対称的に入っているため，新たな $n \times n$ 複素積分変数 Q^{ab} を導入して (5.7) と双対的な表示

$$\Xi_n(z) = \int dQ \int \prod_{i,a} d\psi_i^a d\bar{\psi}_i^a \prod_{k,a} d\chi_k^a d\bar{\chi}_k^a \times$$
$$\exp\left\{-\operatorname{tr} Q^\dagger Q + \bar{\psi}_i^a Q^{ab} \psi_i^b + \bar{\chi}_k^b {Q^\dagger}^{ba} \chi_k^a + z\left(\bar{\psi}_i^a \psi_i^a + \bar{\chi}_k^a \chi_k^a\right)\right\} \tag{5.9}$$

に書き換えられる．この $Z \in \mathbb{C}^{N' \times N}$ から $Q \in \mathbb{C}^{n \times n} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ への積分変数変換を，カイラル GUE に対する**ハバード–ストラトノビッチ変換**と呼ぶ．変換後の (5.9) では今度は添字 $i = 1, \ldots, N'$ および $k = 1, \ldots, N$ が対角的に入っているため，グラスマン数積分は単なる N' 乗および N 乗を与えて

$$\Xi_n(z) = \int dQ\, \mathrm{e}^{-\operatorname{tr} Q^\dagger Q} \det(z+Q)^{N'} \det(z+Q^\dagger)^N := \int dQ\ \mathrm{e}^{-S(Q)},$$
$$S(Q) = \operatorname{tr} Q^\dagger Q - N' \operatorname{tr} \log(z+Q) - N \operatorname{tr} \log(z+Q^\dagger) \tag{5.10}$$

が得られる．

以上では特性多項式の正冪を考えたが，レプリカ極限 $n \to 0$ を想定するならば負冪も対等の資格をもつはずである．この場合には (5.5) の替わりに通常の複素数 ϕ に対するガウス積分公式（行列 A_{ij} の固有値の実部は全て正とする）

$$\int \prod_k \frac{d\phi_k d\phi_k^*}{\pi}\, \mathrm{e}^{-\phi_i^* A_{ij} \phi_j} = \frac{1}{\det A} \tag{5.11}$$

に基づいて，$N' \times n$ 成分複素変数 $\phi_i^a (i = 1, \ldots, N', a = 1, \ldots, n)$ および $N \times n$ 成分複素変数 $\eta_k^a (k = 1, \ldots, N, a = 1, \ldots, n)$ によって指数化を行う：

$$\det\left[z - i\begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^\dagger & 0 \end{pmatrix}\right]^{-n} = \int \prod_{i,a} \frac{d^2\phi_i^a}{\pi} \prod_k \frac{d^2\eta_k^a}{\pi} \times$$
$$\exp\left\{-(\phi_i^a\ \eta_k^a)^* \left[z\begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{kl} \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 & Z_{il} \\ Z_{kj}^\dagger & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \phi_j^a \\ \eta_l^a \end{pmatrix}\right\}. \tag{5.12}$$

グラスマン積分の場合と異なり，複素積分の収束性のためには (5.2) のとおりに $\mathrm{Re}\, z > 0$ が必要であることに注意する．その後同様のハバード–ストラトノビッチ変換を行えば，

$$\Xi_{-n}(z) := \left\langle \det\left[z - i\begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^\dagger & 0 \end{pmatrix}\right]^{-n} \right\rangle$$
$$= \int dQ\, \mathrm{e}^{-\operatorname{tr} Q^\dagger Q} \det(z+Q)^{-N'} \det(z+Q^\dagger)^{-N} := \int dQ\ \mathrm{e}^{-\tilde{S}(Q)},$$
$$\tilde{S}(Q) = \operatorname{tr} Q^\dagger Q + N' \operatorname{tr} \log(z+Q) + N \operatorname{tr} \log(z+Q^\dagger) \tag{5.13}$$

が得られることは容易に見て取れる．$\langle \det(z-iH)^{\pm n} \rangle, n \in \mathbb{N}$ に対す表式 (5.10) および (5.13) をそれぞれフェルミオン型およびボゾン型レプリカ表示と呼ぶ．

5.2 ラージ N 極限

ここではフェルミオン型レプリカ (5.10) を考える．"有効作用" $S(Q)$ 中には元の Z 行列のサイズ N および N' が明示的に入っているので，その熱力学極限 $N \gg 1$ $(\nu = N' - N = O(1))$ は鞍点方程式

$$0 = \frac{\partial S}{\partial Q} = Q^\dagger - N(z+Q)^{-1},$$
$$0 = \frac{\partial S}{\partial Q^\dagger} = Q - N(z+Q^\dagger)^{-1} \tag{5.14}$$

により決定される．これから明らかに $Q = O(\sqrt{N})$ であるが，まずは z が同じく $O(\sqrt{N})$ の量である場合を考える．上 2 式から $[Q, Q^\dagger] = 0$ および $Q = Q^\dagger$ が従い，これは単位行列に比例する配置 $Q = q\, I_n$ により満たされる．q としては 2 次方程式 (5.14) の根のうち $\mathrm{Re}\, z > 0$ において極小値を与える $q(z) = \left(-z + \sqrt{z^2+4N}\right)/2$ が選ばれ，積分は漸近的に

$$\Xi_n(z) = c_n\ \mathrm{e}^{-nq(z)^2 + 2nN\log(z+q(z))}$$

と評価できる（c_n は $c_0 = 1$ となる定数）．指数の量が q について停留値をとっていることを考慮すると，レゾルベントは

$$G(z) = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathrm{e}^{-nq^2 + 2nN\log(z+q)} \right) \Bigg|_{q \to q(z)} = 2q(z). \tag{5.15}$$

これから (5.2) により固有値密度に対して

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \pi^{-1}\sqrt{4N - \lambda^2} & (|\lambda| \le \sqrt{4N}) \\ 0 & (|\lambda| > \sqrt{4N}) \end{cases} \tag{5.16}$$

が従い，ウィグナーの半円則 (4.4) を正しく再現する（符号の異なる固有値が N 対あるため $\int d\lambda \rho(\lambda) = 2N$）．(5.3) 式における $1/n$ が指数に含まれる因子 $\mathrm{tr}\, I_n = n$ によりキャンセルされて有限の結果を与えることに注目されたい．またボゾン型レプリカ (5.13) からも同一の結果を得ることができる．この結果は，少なくとも局所的な揺らぎを平均した大域的固有値密度については形式的な極限 $n \to 0$ の曖昧さにも関わらずレプリカ法が有効であることを示している．

では，準位統計でより重要な局所的固有値相関についてもレプリカ法は有効なのだろうか．歴史的には，レプリカ法は準位相関関数の非振動部分，すなわち GUE の 2 点相関関数 (4.17)

$$R_2^{(\mathrm{conn})}(x) = -\frac{1}{2\pi^2 x^2} + \frac{\cos 2\pi x}{2\pi^2 x^2} \quad \text{については} \quad -\frac{1}{2\pi^2 x^2} \quad \text{のみ,}$$

すなわち $x \gg 1$ での漸近展開のみを再現できるに留まると否定的に考えられてきた[37]．しかし現在では，次節で解説するように不変ランダム行列についてはこの困難は解決されている．

5.3 微視的極限

次にカイラル GUE の原点近傍の局所的な固有値分布を考えることとし，$|z| \ll \sqrt{N}$ とする．このときフェルミオン型レプリカの鞍点方程式 (5.14) はともに $Q^\dagger Q = NI_n$ を与え，これは

$$Q = \sqrt{N}U, \quad U \in \mathrm{U}(n) \tag{5.17}$$

を解多様体としてもつ．すなわち，$Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の極表示

$$Q = RU, \ U = \mathrm{e}^{iH} \in \mathrm{U}(n), \ R = \mathrm{e}^{H'} \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})/\mathrm{U}(n)$$

（H, H' はエルミート行列）において動径部分 R は鞍点方程式により完全に固定されるが，角度部分 U が積分領域として残る．次に変数を $z = \frac{x}{2\sqrt{N}}$ とスケールして原点近傍を拡大し，x を固定して $N \to \infty$ 極限をとると次式の簡潔な表示に至る：

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \Xi_n\left(\frac{x}{2\sqrt{N}}\right) \\
&= \int_{\mathrm{U}(n)} dU \lim_{N\to\infty} \det\left(U + \frac{x}{2N}\right)^{N+\nu} \det\left(U^\dagger + \frac{x}{2N}\right)^N \\
&= \int_{\mathrm{U}(n)} dU \,(\det U)^\nu \,\mathrm{e}^{(x/2)\,\mathrm{tr}(U+U^\dagger)} := \mathcal{Z}_n(x).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

一方，ボゾン型レプリカ (5.13) の場合に同様の操作を進めると

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \Xi_{-n}\left(\frac{x}{2\sqrt{N}}\right) \\
&= \int_{\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})/\mathrm{U}(n)} dR \,(\det R)^\nu \,\mathrm{e}^{-(x/2)\,\mathrm{tr}(R+R^{-1})} := \mathcal{Z}_{-n}(x)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

が得られる．ただし上の積分領域 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})/\mathrm{U}(n)$ は $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ を用いて $R = A^\dagger A$ と表されるウィシャート型行列に渡る．$\mathcal{Z}_n(x)$ がコンパクト領域上の積分であるのに対して $\mathcal{Z}_{-n}(x)$ は非コンパクト領域上の積分になっており，この差異は一般にフェルミオン型とボゾン型のレプリカを特徴付ける．

$n = 1$ とすると (5.18) および (5.19) はそれぞれ $\mathrm{U}(1)$ および $\mathrm{GL}(1, \mathbf{C})/\mathrm{U}(1) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の積分である第 1 および第 2 種変形ベッセル関数

$$\mathcal{Z}_1(x) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \,\mathrm{e}^{i\nu\theta + x\cos\theta} = I_\nu(x), \tag{5.20}$$

$$\mathcal{Z}_{-1}(x)=\int_0^\infty ds\,\mathrm{e}^{\nu s-x\cosh s}=K_\nu(x) \tag{5.21}$$

に帰着する．一般の $n\in\mathbb{N}$ に対する $\mathcal{Z}_{\pm n}(x)$ を求めるにあたり，第 7 章での便宜上 (5.8) の代わりに縮退していないスペクトル変数 $z_1,\ldots,z_n$ を有する

$$\Xi_{\pm n}(z_1,\ldots,z_n):=\left\langle\prod_{a=1}^n\det\left[z_a-i\begin{pmatrix}0&Z\\Z^\dagger&0\end{pmatrix}\right]^{\pm1}\right\rangle \tag{5.22}$$

を評価しておく．これに対して上述の操作を辿ると，スケーリング変数 $x_a=2\sqrt{N}z_a$ および $X:=\mathrm{diag}(x_1,\ldots,x_n)$ の関数としての微視的極限

$$\mathcal{Z}_n(x_1,\cdots,x_n)=\int_{\mathrm{U}(n)}dU\,(\det U)^\nu\,\mathrm{e}^{(1/2)\,\mathrm{tr}\,X(U+U^\dagger)}, \tag{5.23}$$

$$\mathcal{Z}_{-n}(x_1,\cdots,x_n)=\int_{\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})/\mathrm{U}(n)}dR\,(\det R)^\nu\,\mathrm{e}^{-(1/2)\,\mathrm{tr}\,X(U+U^{-1})} \tag{5.24}$$

が得られる．これらは行列 U および R の固有値 $\{\mathrm{e}^{i\theta_a}\}$, $\{\mathrm{e}^{s_a}\}$ を用いて

$$\mathcal{Z}_n(\{x\})=\int_0^{2\pi}\prod_{a=1}^n\left(\frac{d\theta_a}{2\pi}\,\mathrm{e}^{i\nu\theta_a+x_a\cos\theta_a}\right)\prod_{b>c}^n\left(\mathrm{e}^{i\theta_b}-\mathrm{e}^{i\theta_c}\right)\left(\mathrm{e}^{-i\theta_b}-\mathrm{e}^{-i\theta_c}\right), \tag{5.25}$$

$$\mathcal{Z}_{-n}(\{x\})=\int_0^\infty\prod_{a=1}^n\left(ds_a\,\mathrm{e}^{\nu s_a-x_a\cosh s_a}\right)\prod_{b>c}^n\left(\mathrm{e}^{s_b}-\mathrm{e}^{s_c}\right)\left(\mathrm{e}^{-s_b}-\mathrm{e}^{-s_c}\right)$$

と表される．上式における，行列要素から固有値・固有ベクトルへの変数変換に伴うヤコビアン $\prod_{b>c}^n(\cdots)$ は定理 2.1 と同様にして得られたものである．上の n 重積分を個々の変数（θ_a または s_a）についての積分の積の和に分解することにより，

$$\mathcal{Z}_n(\{x\})=\frac{\det[x_a^{b-1}I_{\nu+b-1}(x_a)]_{a,b=1}^n}{\prod_{a>b}^n(x_a^2-x_b^2)}, \tag{5.26}$$

$$\mathcal{Z}_{-n}(\{x\})=\frac{\det[x_a^{b-1}K_{\nu+b-1}(x_a)]_{a,b=1}^n}{\prod_{a>b}^n(x_a^2-x_b^2)} \tag{5.27}$$

が得られる[38] *2)．最後に合流極限 $x_1,\ldots,x_n\to x$ をとると，$\mathcal{Z}_{\pm n}$ は（比例係数を除いて）アダマール行列式

$$\mathcal{Z}_n(x)=\det[I_{\nu+a-b}(x)]_{a,b=1}^n=\frac{\det[(x\partial_x)^{a+b}I_\nu(x)]_{a,b=0}^{n-1}}{x^{n(n-1)}}, \tag{5.28}$$

$$\mathcal{Z}_{-n}(x)=\det[K_{\nu+a-b}(x)]_{a,b=1}^n=\frac{\det[(x\partial_x)^{a+b}K_\nu(x)]_{a,b=0}^{n-1}}{x^{n(n-1)}} \tag{5.29}$$

---

*2) Itzykson–Zuber 型公式（$X=\mathrm{diag}(x_1,\ldots,x_n), Y=\mathrm{diag}(y_1,\ldots,y_n)$）

$$\int_{\mathrm{U}(n)}dU\int_{\mathrm{U}(n)}dV\,\exp\left(\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,UXVY\right)=\mathrm{const.}\frac{\det[I_0(x_ay_b)]_{a,b=1}^n}{\prod_{a>b}^n(x_a^2-x_b^2)(y_a^2-y_b^2)}$$

の合流極限 $y_a\to1$ をとることによって，(5.23) から (5.26) を得ることもできる[39],[40]．

に帰着する[41]．この $n \times n$ 行列式表示から以下の性質が従う：

定理 5.1（戸田格子階層[42]） $\mathcal{Z}_{\pm n}(x)$ はともに漸化式

$$(x\partial_x)^2 \log \mathcal{Z}_n(x) = 2nx^2 \frac{\mathcal{Z}_{n+1}(x)\mathcal{Z}_{n-1}(x)}{\mathcal{Z}_n(x)^2} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad (5.30)$$

を満たす（ただし $\mathcal{Z}_0(x) = 1$）．

[証明] 行列 A の (a,b)-余因子を $\tilde{A}_{ab}$，$(ab;cd)$-2 重余因子を $\tilde{\tilde{A}}_{ab;cd}$ と記すと，任意の a,b,c,d に対して

$$\det A = \frac{\tilde{A}_{ab}\tilde{A}_{cd} - \tilde{A}_{ad}\tilde{A}_{cb}}{\tilde{\tilde{A}}_{ab;cd}}$$

が成り立つ（シルベスターの恒等式）．行列 $A = [(x\partial_x)^{a+b}K_\nu(x)]_{a,b=0}^n$ および $[(x\partial_x)^{a+b}I_\nu(x)]_{a,b=0}^n$ に対して $a = b = n-1$, $c = d = n$ として上の恒等式を用いたのち，変形ベッセル関数間の微分等式を用いればよい．□

(5.30) 式は本来，フェルミオン型レプリカの間のみ $(n \geq 1)$, ないしはボゾン型レプリカの間のみ $(n \leq -1)$ に成立する漸化式であるが，それらが同一であることから (5.30) 式は両者を跨ぐ $n \to 0$ の場合（レプリカ極限）でも成り立つものと拡大解釈しよう．このとき (5.30), (5.20), (5.21) より

$$\lim_{n\to 0} \frac{1}{n}\partial_x \left(x\partial_x \log X_n(x)\right) = 2x\, \mathcal{Z}_1(x)\mathcal{Z}_{-1}(x) = 2x\, I_\nu(x)K_\nu(x)$$

が得られる．然るにこの左辺は (5.3) によると $\partial_x \left(x\, G(x)\right)$ に等しいので，両辺を積分して

$$x\, G(x) = x^2 \left(I_\nu(x)K_\nu(x) - I_{\nu+1}(x)K_{\nu-1}(x)\right) + C \quad (5.31)$$

が得られる．H に ν 個の零固有値が存在するためには $G(x)$ が ν/x を含むべきことから，積分定数 C は ν に他ならない．最後に $x = i\zeta_-$ とおいて (5.2) を用いると，カイラル GUE の微視的準位密度 $\rho(\zeta)$ (4.36) が正確に再現される．パンルヴェ方程式のレプリカ極限を用いる別手法によると，上記の結果のみならず GUE のバルク 2 点相関関数 (4.17) をレプリカ法で再現することも可能である[43]．

5.4 普遍性，超対称性法

前節のように，レプリカ法は大域的のみならず（漸化式の拡大解釈を許せば）微視的な準位密度や 2 点相関関数に対して直交多項式法と一致する厳密解を与えることがわかった．その計算過程を振り返ると，仮にランダム行列を出発点とせず，正規分布する乱数を含む一般的なハミルトニアンについても，乱雑さについてのガウス積分を実行して非線形 σ 模型 (5.18), (5.19) が得られる場合

には同一の微視的準位密度 (4.36) を普遍的にもつことに気付かれるであろう．このようにレプリカ法は 1 体系ハミルトニアンのアンダーソン強束縛模型や乱雑さをもつ多体系などの，ランダム行列を越えたより現実的な理論に適用可能であり，準位統計の普遍性の起源が非線形 σ 模型にあることを教えてくれるが，同様の操作を任意の p 点相関関数について行うことは難しく，固有値が行列式プロセス（定理 3.1）に従うという事実を示すことは極めて非自明となる．

またレプリカ法のもう一つの弱点は，整数点 $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ においてのみ定義される量について極限 $n \to 0$ をとることに伴う曖昧さにある．しかしレプリカ極限をとる必要性は，出発点を特性多項式の整数冪ではなくそれらの比の期待値

$$\Xi_{1,-1}(z; w) = \left\langle \frac{\det(z - iH)}{\det(w - iH)} \right\rangle$$

に採ったうえで (5.3) の代わりに

$$G(z) = \lim_{w \to z} \frac{\partial}{\partial z} \Xi_{1,-1}(z; w)$$

とすれば回避できる．$\Xi_{1,-1}$ の指数化にはグラスマン数 (Gr) と複素数 ($\mathbb{C}$) の両方が必要となるため，平方完成によりそれらの双線形形式と同一視される Q 行列は必然的にブロック構造 $\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathrm{Gr} \\ \hline \mathrm{Gr} & \mathbb{C} \end{array}\right)$ をもつ超行列（グレーデッド (graded) 行列）となる．この手法は超対称性法と呼ばれ，現在では一般的な乱雑系を扱う最も有力な手法となっているが本書では割愛する．関心のある読者は [44] を参照されたい．

5.5 対称性の自発的破れ

ここで一連の式変形を対称性の観点から眺めることにより，非線形 σ 模型 (5.18) の物理的意味を明らかにしよう．Z 変数について積分する前の (5.7) で $z = 0$ とおいた式は，グラスマン数に対する 2 種類の独立なユニタリー変換

$$\begin{aligned} &\psi_i^a \mapsto u^{ab} \psi_i^a, \ \bar{\chi}_k^a \mapsto \bar{\chi}_k^b u^{\dagger ba}, \quad u \in \mathrm{U}(n), \\ &\chi_k^a \mapsto v^{ab} \psi_k^a, \ \bar{\psi}_i^a \mapsto \bar{\psi}_i^b v^{\dagger ba}, \quad v \in \mathrm{U}(n) \end{aligned} \tag{5.32}$$

の下で明らかに不変になっている．この直積群の対称性 $\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n)$ は，関係式 (5.3) を用いるために形式的に複製した $n + n$ 種のグラスマン数の間の対称性であることから，**レプリカ対称性**と呼ばれる．また，$z \neq 0$ の場合には (5.7) はレプリカ対称性 (5.32) の対角部分群 ($u = v$) である $\mathrm{U}(n)$ の下でのみ不変であり，「ソース項 z はレプリカ対称性 $G = \mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n)$ をそのベクトル部分群 $H = \mathrm{U}(n)$ へとあらわに破る」と称される．

次に，Z 変数について積分した後の表式 (5.9) において，Q 変数は 0 でない

鞍点 $Q=Q^\dagger=qI_n$ をとる．このとき，$z=0$ の場合においても (5.9) 式は，(5.32) の対角部分群 $u=v$ に対してのみ不変になっている．すなわち，Z 積分のためにレプリカ対称性 G は自発的にベクトル部分群 H に破れるのである．このため，Ξ は必然的に商空間 $G/H=(\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(n))\,/\mathrm{U}(n)\simeq\mathrm{U}(n)$ 上の積分 (5.18) によって与えられる．素粒子論における用語を援用して，商空間として現れるリーマン対称空間（均質空間）G/H を**南部–ゴールドストーン (NG) 多様体**と呼び，その上の積分 (5.18) を（0 次元）**非線形 σ 模型**と呼ぶ．あらわな破れを与える z が 0 であれば (5.18) の指数は無く，群多様体 $\mathrm{U}(n)$ は積分に全て同一の寄与を与える．一方，スケールされた x でパラメトライズされるあらわな破れが僅かに存在する場合には群多様体 $\mathrm{U}(n)$ の各点からの寄与は一様ではなく，$\mathrm{tr}(U+U^\dagger)$ の極大値を与える $U=I_n$ が最大の寄与を与える．

ランダム行列における上述の性質は，第 7 章で解説する強い相互作用における n 種類の無質量クォークに対するカイラルフレーバー対称性 $\mathrm{SU}(n)_L\times\mathrm{SU}(n)_R$ の自発的破れと完全に並行しており，前者は後者に対する（破れが厳密に証明できる）プロトタイプになっている．なお後者では ψ,χ は n 種類存在するクォーク場 q の左巻き・右巻きワイル成分，$\bar{\psi},\bar{\chi}$ はそのディラック共役 $\bar{q}$ の右巻き・左巻きワイル成分に対応し，Z 積分の対応物はグルーオンの非可換ゲージ場 A_μ についての経路積分である．また z はクォークのカレント質量，Q の鞍点値はカイラル凝縮 $\langle\bar{q}q\rangle$，商空間 $\mathrm{U}(n)$ は擬スカラー中間子場に対応する．非線形 σ 模型の $x=0$ での状況は無質量クォークの場合での物理的に同一な基底状態の連続分布，また $x\neq0$ での状況は微小なクォーク質量のために縮退が解けて場の基底状態が一つ選ばれることに他ならない．本書後半ではこの平行性をさらに進めて，ランダム行列を用いた強い相互作用の定量的解析について解説する．

5.6 カラー–フレーバー変換

ある対合的対称性をもつ行列集団に課す確率測度の緩やかな変更に対して準位揺動の振舞いが安定であるという事実，すなわち**普遍性**がランダム行列理論の有意性を支えている．もし確率測度を元の $(dH)e^{-\mathrm{tr}\,V(H)}$ から僅かに変更させるにつれて準位揺動が鋭敏に反応するのであれば，特定の確率集団から得られた量子カオス系に対する予言はそもそも信頼できないであろう．この普遍性の起源が，ランダム行列集団における連続的対称性の自発的破れに伴う南部–ゴールドストーン場の標的空間となる対称空間の分類にあることを見るため，2 種類の行列値変数の積分の等価性を示そう．

以下では前節まで扱ってきた，ハミルトニアン H の模式化であるエルミート行列の確率集団ではなく，時間発展のフローケット演算子 e^{itH} を模式化したユニタリー行列の確率集団（ダイソンの円周集団）を考える．ある確率測度

に従って分布するユニタリー行列 U の固有値の相関関数を算出するためには，プローブとして固有値に特異性をもつレゾルベント $\left\langle \mathrm{tr}(I-\mathrm{e}^{-i\theta}U)^{-1}\right\rangle$ を求めればよい．エルミート行列の場合（5.1 節）と同様のレプリカ法によれば，レゾルベントは特性多項式 $\Delta(\theta)\equiv\det(I-\mathrm{e}^{-i\theta}U)$ の冪の期待値から得られる．特性多項式のグラスマン数による指数化

$$\Delta(\theta)=\int\prod_k d\psi_k d\bar{\psi}_k\,\exp\left(\bar{\psi}_i(I-\mathrm{e}^{-i\theta}U)_{ij}\psi_j\right) \tag{5.33}$$

を念頭に置いてツィルンバウアーは，次式を一例とする拡張されたハバード–ストラトノビッチ変換公式を示した[45]．

定理 5.2（**カラー–フレーバー変換**）*3）　添字 $i,j=1,\ldots,N$ および $a,b=1,\ldots,n$ をもつグラスマン数 ψ_i^a などに対して下式が成立する．

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{U}(N)}dU\exp\left(\bar{\psi}_i^a U_{ij}\chi_j^a-\bar{\chi}_i^a U_{ij}^\dagger\psi_j^a\right)=\\&\int_{\mathbb{C}^{n\times n}}\frac{d^2Z}{\det(I+ZZ^\dagger)^{2n+N}}\exp\left(\bar{\psi}_i^a Z^{ab}\psi_i^b+\bar{\chi}_i^a Z^{\dagger ab}\chi_i^b\right).\end{aligned} \tag{5.34}$$

[証明]　便宜上，添字 i を色（カラー），a を香り（フレーバー）と呼ぶ．香りの種類を 2 倍に拡大した添字 $A=\pm1,\ldots,\pm n$ を導入し，色および拡大した香りの変換を統合したリー群 $G=\mathrm{U}(2nN)$ を考えてその生成子を T_{ij}^{AB} と記す．香り 1 重項の $\{\sum_A T_{ij}^{AA}\}$ が生成する $G_C=\mathrm{U}(N)$ と色 1 重項の $\{\sum_i T_{ii}^{AB}\}$ が生成する $G_F=\mathrm{U}(2n)$ は G 中で互いに可換な最大の部分群になっている．

次に，反交換関係

$$\{c_i^{-a},c_j^{+b}\}=\{\bar{c}_i^{+a},\bar{c}_j^{-b}\}=\delta_{ij}\delta^{ab}\qquad(\text{その他の反交換子は }0)$$

を満たすフェルミオン生成演算子 $c_i^{-a},\bar{c}_i^{+a}$ および消滅演算子 $c_i^{+a},\bar{c}_i^{-a}$ を導入し，$c_i^{+a}|0\rangle=\bar{c}_i^{-a}|0\rangle=0$ を満たす真空状態ベクトル $|0\rangle$ の上に張られるフォック空間 V における G の表現を写像

$$R:G\ni\exp(\theta_{ij}^{AB}T_{ij}^{AB})\mapsto\exp(\theta_{ij}^{AB}\bar{c}_i^A c_j^B)\in\mathrm{GL}(V)$$

によって定義する．このとき，色 1 重項状態が張る V の部分空間 $R(G_F)|0\rangle$ への射影演算子 P は定義により

$$P=\int_{\mathrm{U}(2n)}dg\,R(g)|0\rangle\langle0|R(g)^\dagger \tag{5.35}$$

であるが，$\bar{c}_i^{+a}c_i^{+b}$ および $\bar{c}_i^{-a}c_i^{-b}$ で生成される対角部分群 $H=\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(n)$

*3）(5.34) 式左辺は，ψ などをクォーク場とする，2 点上の格子ゲージ理論 (6.11) に他ならない．この解釈では，左辺は U を色をもつグルーオン場とする基礎理論としてのゲージ理論，右辺は Z を香りをもつ中間子場とするその有効理論と見なせるためにこの名称がある．

は真空 $|0\rangle$ を不変に保つため，上の積分域は実際に真空を変化させる $\bar{c}_i^{+a} c_i^{-b}$ および $\bar{c}_i^{-a} c_i^{+b}$ が生成する右剰余空間 $\mathrm{U}(2n)/(\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(n))$ にまで縮小できる．この対称空間は (2.4) のように複素行列 Z で座標づけられる*4)．他方で，任意の V のベクトルからその色 1 重項成分への射影はそのベクトルに G_C 全体を作用させて平均する操作によっても実現できるから，P はもう一つの積分表示

$$P = \int_{\mathrm{U}(N)} dU\, R(U) \tag{5.36}$$

をもつ．演算子 P に対する 2 つの表示 (5.36) と (5.35) を $\exp(-\psi_i^a \bar{a}_i^{+a} + \bar{\psi}_i^a c_i^{-c})|0\rangle$ などのコヒーレント状態で挟んだ行列要素が (5.34) 式の左辺および右辺を与える．□

上の証明においてリー群 G 自体，およびその中で可換な最大の部分群の組 (G_C, G_F) の選択は任意であり，可能な全ての (G, G_C, G_F) の 3 つ組に対して式 (5.34) の対応物が存在する．特定のランクのみをもつ例外群は熱力学極限 $(N\to\infty)$ およびレプリカ極限 $(n\to 0)$ を要する準位統計への適用外であるから，フェルミオン型レプリカで現れるコンパクトリー群 G としては 3 種類の古典群（ユニタリー群 A, 直交群 BD, ユニタリーシンプレクティック群 C）に限られる．これらの部分群 $H \subsetneq G$ の作用による同値類 $\{gH|g\in G\}$ の集合として得られる剰余空間 G/H（リーマン対称空間）はカルタンによって分類されており，**分類 2** の表 2.1 に列挙した 10 種類で尽くされる．これらを慣習上「色」サイドの対称空間の接空間が表 2.1 に掲げた 10 種類のハミルトニアン行列の族になるように列挙すると，色・香り変換の両辺に現れるコンパクトな対称空間は表 5.1 の 10 組で尽くされる．構成上いずれを色・香りと呼ぶかは任意であるため，2 つの行列変数の双対な組は自明に反射的になっている．なおここでは表 2.1 のハミルトニアンの対称性に基づく整列の代わりに，古典群および同種の古典群の直積の間の自然な埋め込み系列

$$\mathrm{U}\times\mathrm{U} \subset \mathrm{U} \subset \mathrm{U}\times\mathrm{U} \quad (\mathbb{C}\text{ 上}),$$

$$\mathrm{O}\times\mathrm{O} \subset \mathrm{O} \subset \mathrm{U} \subset \mathrm{Sp} \subset \mathrm{Sp}\times\mathrm{Sp} \subset \mathrm{Sp} \subset \mathrm{U} \subset \mathrm{O} \subset \mathrm{O}\times\mathrm{O} \quad (\mathbb{R}, \mathbb{H}\text{ 上})$$

に基づく順序（対称空間のループ空間をとる操作のボット周期性）に従って並べてあり，色変数側ではこの系列を下方向に，香り変数側ではこの系列を上方向に辿っている．

カラー–フレーバー変換は双基本表現量が $\mathbb{C}$ 数であるボゾン型レプリカの場合，さらには ψ_i^a の種類 (a) にグラスマン数成分 $(a_F = 1,\ldots,n_F)$ と $\mathbb{C}$ 数成

*4) $n=1$ の場合に，2 次元球面 $S^2 \simeq \mathrm{U}(2)/(\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1))$ が立体射影座標 $z\in\mathbb{C}^{\cup}\{\infty\}$ でパラメトライズされることの拡張である．この場合，面積要素 $(1+zz^*)^{-2}d^2z$ が (5.34) の右辺に現れる．

表 5.1 カラー–フレーバー変換で結ばれる対称空間上の積分の等価性.

記号	色行列変数	香り行列変数	記号
A	$\mathrm{U}(N)=\mathrm{U}(N)\times\mathrm{U}(N)/\mathrm{U}(N)$	$\mathrm{U}(n+n')/\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(n')$	AIII
AIII	$\mathrm{U}(N+N')/\mathrm{U}(N)\times\mathrm{U}(N')$	$\mathrm{U}(n)=\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n)$	A
BD	$\mathrm{O}(N)=\mathrm{O}(N)\times\mathrm{O}(N)/\mathrm{O}(N)$	$\mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n)$	DIII
DIII	$\mathrm{O}(2N)/\mathrm{U}(N)$	$\mathrm{O}(n)=\mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n)$	BD
AII	$\mathrm{U}(2N)/\mathrm{Sp}(2N)$	$\mathrm{O}(n+n')/\mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(n')$	BDI
CII	$\mathrm{Sp}(2(N+N'))/\mathrm{Sp}(2N)\times\mathrm{Sp}(2N')$	$\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$	AI
C	$\mathrm{Sp}(2N)=\mathrm{Sp}(2N)\times\mathrm{Sp}(2N)/\mathrm{Sp}(2N)$	$\mathrm{Sp}(2n)/\mathrm{U}(n)$	CI
CI	$\mathrm{Sp}(2N)/\mathrm{U}(N)$	$\mathrm{Sp}(2n)=\mathrm{Sp}(2n)\times\mathrm{Sp}(2n)/\mathrm{Sp}(2n)$	C
AI	$\mathrm{U}(N)/\mathrm{O}(N)$	$\mathrm{Sp}(2(n+n'))/\mathrm{Sp}(2n)\times\mathrm{Sp}(2n')$	CII
BDI	$\mathrm{O}(N+N')/\mathrm{O}(N)\times\mathrm{O}(N')$	$\mathrm{U}(2n)/\mathrm{Sp}(2n)$	AII

分 $(a_B=1,\ldots,n_B)$ が混在している場合にも拡張でき，前者の場合には非コンパクトリー群の剰余空間（擬リーマン対称空間），後者の場合には超リー群（$\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{C} & \mathrm{Gr}\\ \hline \mathrm{Gr} & \mathbb{C}\end{array}\right)$ 型の $\mathbb{Z}_2$ グレーデッドな行列変数）の剰余空間上の積分間の等式が得られる[27].

表 5.1 右側で分類された 10 種類の対称空間 $\mathcal{M}$ が非自明なホモトピー群 $\pi_k(\mathcal{M})=\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}_2$ をもつ場合，対応する次元における量子場の理論としての非線形 σ 模型は $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}_2$ 値のトポロジカルな保存量をもつことができる．トポロジカルに非自明な場の配位は自明な配位に変形できずアンダーソン局在を免れるため，サンプルの表面のみが伝導体になる（トポロジカル絶縁体）．従って表 5.1 はトポロジカル絶縁体になり得るランダムな量子物性系のハミルトニアン（表 5.1 左側）の分類にも用いられる[46].

5.7 カイラル円周集団

カラー–フレーバー変換を用いた準位統計の導出の例として，AIII 型の対称空間 $\mathrm{U}(2N)/\left(\mathrm{U}(N)\times\mathrm{U}(N)\right)$ に対応するユニタリー行列集団（カイラル円周ユニタリー集団，カイラル CUE）の微視的固有値密度の場合を取り上げる[47]. 上記の対称空間は $g\in\mathrm{U}(2N)$ の同値類

$$\left\{ g\begin{bmatrix} u & 0\\ 0 & v\end{bmatrix} \middle| (u,v)\in\mathrm{U}(N)\times\mathrm{U}(N)\right\} \tag{5.37}$$

の空間であり，各同値類は類関数

$$V=\Gamma g\Gamma g^{\dagger},\quad \Gamma=\begin{bmatrix} I_N & 0\\ 0 & -I_N\end{bmatrix} \tag{5.38}$$

によって代表される．任意の g は $\mathrm{U}(N)\times\mathrm{U}(N)$ 変換および定数倍を施すこ

とにより必ず $\tilde{g}=\begin{bmatrix} I_N & Z \\ -Z^\dagger & I_N \end{bmatrix}$, $Z\in\mathbb{C}^{N\times N}$ の形に変形でき，類関数 V は $V=\Gamma\tilde{g}\Gamma\tilde{g}^{-1}$ と表される．この複素座標 Z_{ij}, $i,j=1,\ldots,N$ を用いると，複素グラスマン多様体 $\mathrm{U}(2N)/\left(\mathrm{U}(N)\times\mathrm{U}(N)\right)$ の不変測度は

$$dV=\frac{\prod_{i,j=1}^N d^2Z_{ij}}{\det(1+ZZ^\dagger)^{2N}} \tag{5.39}$$

である．従ってフェルミオン型レプリカによる $\varDelta(\theta)$ (5.33) の冪の期待値は

$$\begin{aligned}\Xi_n(\theta) &= \int_{\mathrm{U}(2N)/(\mathrm{U}(N)\times\mathrm{U}(N))} dV\ \det(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\,V)^n \\ &= \int_{\mathbb{C}^{N\times N}} \frac{\prod d^2Z}{\det(1+ZZ^\dagger)^{2N}}\det\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\,\Gamma\tilde{g}\Gamma\tilde{g}^{-1}\right)^n \\ &= \int_{\mathbb{C}^{N\times N}} \frac{\prod d^2Z}{\det(1+ZZ^\dagger)^{2N+n}}\det\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\,\tilde{g}-\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\,\Gamma\tilde{g}\Gamma\right)^n \end{aligned} \tag{5.40}$$

となる．5.3 節と同様に $N\times n$ 成分のグラスマン数 $\psi,\chi,\bar{\psi},\bar{\chi}$ を用いて行列式を指数化し，$\Gamma\tilde{g}\Gamma=\tilde{g}^\dagger$ に注意すると

$$\Xi_n(\theta)=\int d\psi d\bar{\psi}d\chi d\bar{\chi}\times \tag{5.41}$$
$$\int_{\mathbb{C}^{N\times N}}\frac{\prod d^2Z}{\det(1+ZZ^\dagger)^{2N+n}}\ \exp\left([\bar{\psi}\ \bar{\chi}]\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\,\tilde{g}-\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\,\tilde{g}^\dagger\right)\begin{bmatrix}\psi\\ \chi\end{bmatrix}\right)$$

を得る．これに (5.34) 式を適用すれば（$n\leftrightarrow N$ とする），

$$\begin{aligned}\Xi_n(\theta) &= \int d\psi d\bar{\psi}d\chi d\bar{\chi}\int_{\mathrm{U}(n)} dU\ \times \\ &\qquad \exp\left((\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}})(\bar{\psi}\psi+\bar{\chi}\chi)+(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}})(\bar{\psi}U\psi+\bar{\chi}U^\dagger\chi)\right) \\ &= \int_{\mathrm{U}(n)} du\ \det\left(\cos\theta+i\sin\theta\frac{U+U^\dagger}{2}\right)^N. \end{aligned} \tag{5.42}$$

ここまでの式変形には近似を用いておらず厳密である．最後に $x:=iN\theta$ を有限に保ったままで熱力学極限 $N\to\infty$ と微視的極限 $\theta\to 0$ を同時にとる．このとき $\cos\theta\simeq 1$, $\sin\theta\simeq\theta$ であるから上式は

$$\mathcal{Z}_n(x):=\lim_{N\to\infty}\Xi_n\left(\frac{x}{iN}\right)=\int_{\mathrm{U}(n)} dU\ \mathrm{e}^{(x/2)\,\mathrm{tr}\,(U+U^\dagger)} \tag{5.43}$$

となって $\nu=0$ の場合の A 型非線形 σ 模型 (5.18) が得られ，5.3 節の固有値密度の導出に合流する．

$\mathrm{U}(2N)$ の替わりに $g\in\mathrm{O}(2N)$ ないし $\mathrm{Sp}(4N)$ をとって同様の操作を行うと，BDI 型対称空間=実グラスマン多様体 $\mathrm{SO}(2N)/(\mathrm{SO}(N)\times\mathrm{SO}(N))$ ないし CII 型対称空間=4 元グラスマン多様体 $\mathrm{Sp}(4N)/(\mathrm{Sp}(2N)\times\mathrm{Sp}(2N))$ 上の積分であるカイラル円周直交集団ないしカイラル円周シンプレクティック集団の実行列ないし 4 元数行列 Z による表示が得られる．これにカラー–フレー

バー変換を施すことにより，AII 型対称空間 $\mathrm{U}(2n)/\mathrm{Sp}(2n)$ ないし AI 型対称空間 $\mathrm{U}(2n)/\mathrm{O}(2n)$ をパラメトライズする歪対称ユニタリー行列ないし対称ユニタリー行列 U 上の非線形 σ 模型に至る（表 5.1 参照）．このようにカラー–フレーバー変換は，熱力学極限をとる前の段階で，あるクラスのランダム行列集団を無質量 NG モードの非線形 σ 模型に直接変換しており，通常のハバード–ストラトノビッチ変換（5.1 節）を用いる際に現れた有質量の自由度（Q 行列の動径成分）を鞍点方程式を用いて消去する必要がない．この利点のために，ランダム行列の普遍性の起源は今や明白になった：リー群およびその可換な最大の部分群の対 (G, G_C, G_F) から従う双対な対称空間の組が 10 種類に分類されるというカルタンの 1 世紀前の古典的業績こそが，それとほぼ同時に誕生した量子力学における準位統計の普遍性の核であったのだ！

演習問題

5.1　ボゾン型レプリカ (5.12) に 5.2〜3 節の一連の操作を行うことにより，
i.　ウィグナーの半円則 (5.16)，
ii.　特性多項式の微視的極限 (5.19)
を導出せよ．

5.2　Itzykson-Zuber 型公式（脚注 2）を起点として，
i.　合流極限 $y_a \to 1$ をとることにより (5.26) を導け．
ii.　さらに合流極限 $x_a \to x$ をとることにより (5.28) を導け．

第 6 章
QCD とランダム行列

本章では QCD について最小限の導入を行った上でランダム行列理論の歴史的な適用例を紹介するとともに，次章のディラック準位統計を議論するにあたり必要な準備をする．

6.1 量子色力学

ゲージ不変な作用

素粒子の間の，重力を除く 3 種類の相互作用を記述する基礎理論である標準模型は，ゲージ対称性 $\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(3)$ をもつ場の量子論である．そのうちのクォーク場 $q(x)$ とグルーオン場 $A_\mu(x)$ の強い相互作用を記述する SU(3) ゲージ理論は**量子色力学** (QCD) と称され，作用

$$S_{\mathrm{QCD}}[A_\mu,q]=\int d^4x\Big\{-\frac{1}{2g_0^2}\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\sum_{f=1}^{N_F}\bar{q}^f\,(i\gamma^\mu D_\mu-m_f)\,q^f\Big\} \quad (6.1)$$

で記述される．ここで q^f はゲージ群 $\mathrm{SU}(N_C)$ の基本表現 F に属する $f=1,\ldots,N_F$ 種類（フレーバー）のディラックスピノル場*1)，$\bar{q}^f$ はそのディラック共役，γ^μ はクリフォード代数 $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2\eta^{\mu\nu}$ を満たす 4×4 行列の組*2)，m_f は裸のクォークの質量（カレント質量）である．ディラックスピノル場はロー

*1) 実験的には $N_C=3, N_F=6$ であるが，繰り込まれた結合定数 $g(\mu)^2/4\pi$ が $\simeq 1$ となり QCD の摂動展開が破綻する下限のエネルギースケール $\mu=\Lambda_{\mathrm{QCD}}\sim 300\,\mathrm{MeV}$ に比して十分重いクォークを無視して $N_F=2$ (u, d) ないし 3 (u, d, s) と近似する場合もあり，またしばしば N_C の値を仮想的なパラメータとして扱うこともあるため，以下では一般的に N_F, N_C と表記する．

*2) 本書ではミンコフスキー時空において

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}0&I\\I&0\end{pmatrix},\quad\gamma^k=\begin{pmatrix}0&\sigma_k\\-\sigma_k&0\end{pmatrix},\quad\gamma^5=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix},$$

ユークリッド空間 ($\eta^{\mu\nu}\mapsto\delta^{\mu\nu}$) においては $i\gamma^k\mapsto\gamma^k$ とするワイル表示を用いる．

レンツ群 $\mathrm{SO}(3,1) \simeq \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ の可約表現 $(\frac{1}{2},0) \oplus (0,\frac{1}{2})$，すなわち正・負のカイラリティをもつ既約表現である2つのワイルスピノル場 q_L, q_R の直和になっている．弱い相互作用が片方の成分のみを含むカイラル型の理論であるのに対し，QCD は各ディラック場の左・右巻きワイル成分

$$q = \begin{pmatrix} q_L \\ q_R \end{pmatrix}, \quad \bar{q} = \begin{pmatrix} q_R^\dagger & q_L^\dagger \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

を対称的に含んでパリティを保つベクトル型の理論である．

A_μ は $\mathrm{SU}(N_C)$ の随伴表現に属する4元ベクトル場，g_0 は裸のゲージ結合定数である．$D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu$ は q に作用する基本表現のカラー共変微分であり，クォーク場の運動項に現れる微分演算子 $\not{D} := \gamma^\mu D_\mu$ は（共変）ディラック演算子と呼ばれる．また $F_{\mu\nu} \equiv i\,[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$ はカラー電磁場を表し，それから構成される (6.1) の初項はヤン–ミルズ作用 $S_{\mathrm{YM}}[A_\mu]$ と呼ばれる．構成法から，作用 (6.1) は $U(x) \in \mathrm{SU}(N_C)$ を局所的パラメータとするゲージ変換

$$q_f(x) \mapsto U(x) q_f(x), \quad D_\mu(x) \mapsto U(x) D_\mu(x) U(x)^\dagger \tag{6.3}$$

の下で不変になっている．A_μ の2階微分までを含むゲージ不変量を作用とする立場では，第2チャーン数（あるいはトポロジカル荷電，インスタントン数）と呼ばれるゲージ場の位相不変量

$$Q[A_\mu] := -\frac{1}{32\pi^2} \int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \in \mathbb{Z} \tag{6.4}$$

の実定数倍も作用として許され，その係数を θ 角と呼ぶ．

経路積分，インスタントン

量子化においてグルーオン場はボーズ統計を反映して $\mathbb{C}$ 数値関数，クォーク場はフェルミ統計を反映して互いに反交換するグラスマン数値関数として経路積分される．場の関数（演算子）$O(A_\mu, \bar{q}, q)$ の期待値は

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \frac{\mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q}{(\mathrm{gauge})} \exp\left(iS_{\mathrm{QCD}}[A_\mu, q] + i\theta Q[A_\mu]\right) O(A_\mu, \bar{q}, q), \tag{6.5}$$

で与えられる．ここで分母の 1/(gauge) 因子はゲージ変換 (6.3) で移り合う場の配位を同一視し，物理的に異なる配位（ゲージ同値類）についてのみ経路積分を行うことを表す．この因子（ゲージ固定条件 × ファデーエフ–ポポフ行列式）はゴースト場を用いた経路積分で表され，摂動展開することもできる．Z は QCD の分配関数

$$\begin{aligned} Z &:= \int \frac{\mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q}{(\mathrm{gauge})} \exp\left(iS_{\mathrm{QCD}}[A_\mu, q] + i\theta Q[A_\mu]\right) \\ &= \int \frac{\mathcal{D}A_\mu}{(\mathrm{gauge})} \exp\left(iS_{\mathrm{YM}}[A_\mu] + i\theta Q[A_\mu]\right) \prod_f \mathrm{Det}(i\not{D} - m_f) \end{aligned} \tag{6.6}$$

である．特定のトポロジカル荷電 $Q[A_\mu] = \nu \in \mathbb{Z}$ をもつゲージ場のセクターごとに分解すると，

$$Z = \sum_\nu \mathrm{e}^{i\nu\theta} Z_\nu, \quad Z_\nu := \int_{Q[A]=\nu} \frac{\mathcal{D}A_\mu}{(\text{gauge})} \mathrm{e}^{iS_{\text{YM}}[A_\mu]} \prod_f \mathrm{Det}(i\not{D} - m_f) \quad (6.7)$$

となる．特に $\nu = 1$ をとるユークリッド空間上の古典解はトフーフト–ポリヤコフのインスタントン

$$A^a_\mu(x) = \frac{\eta^a_{\mu\sigma}(x-y)_\sigma}{(x-y)^2 + \rho^2} \quad (\eta^a_{\mu\sigma}: \text{定数},\ y_\sigma, \rho: \text{パラメータ}) \qquad (6.8)$$

として知られており，一般の ν をもつ多重インスタントン解も系統的に構成できる（アティヤー–ドリンフェルド–ヒッチン–マニン (ADHM) 構成法）．この構成法から，$Q[A_\mu] = \nu > 0$ をもつゲージ場の背景中でのディラック演算子 $\not{D}$ は ν 個の左巻き零モード

$$\not{D}\psi^{(k)}(x) = 0, \ \gamma_5\psi^{(k)}(x) = +\psi^{(k)}(x) \quad (k = 1, \ldots, \nu) \qquad (6.9)$$

（$\nu < 0$ の場合は右巻き，$\gamma_5\psi^{(k)} = -\psi^{(k)}$）をもつことが従う（アティヤー–シンガーの指数定理）．

QCD の量子的性質

作用 (6.1) から，グルーオン場の伝搬関数 $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$ の最低次の係数が g_0^2 であることがわかる．グルーオン場の伝搬関数は 1 次摂動において図 6.1 のダイアグラムに起因する発散（カットオフスケールの対数型）を含むが，この発散は摂動の 0 次項 g_0^2 が元々有している発散部分と相殺すると考える（繰り込み）と，これらを総和して得られる物理的なゲージ結合定数 g^2 は基準とした伝搬関数中の運動量スケール $p^2 = \mu^2$ に依存することになる．その依存性はクォーク質量を全て 0 と近似すると，繰り込み群方程式

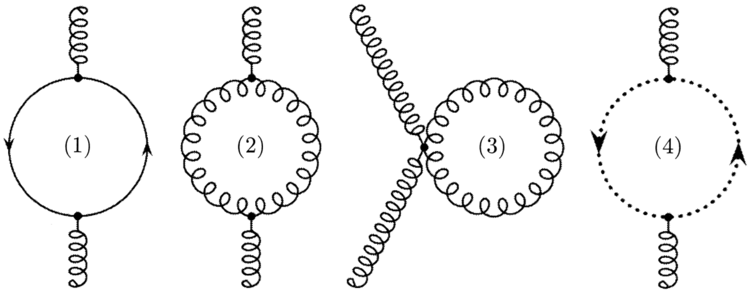


図 6.1　QCD におけるグルーオン場（波線）の伝搬関数の 1 次摂動補正項．(1) は N_F 種類のクォーク場（実線）との相互作用，(2), (3) はグルーオン場の自己相互作用，(4) はゲージ変換 (6.3) の下で同値な場の同一視 [(6.5) 分母の因子] に由来するゴースト場（点線）との相互作用から生じる真空分極である．

$$\mu^2 \frac{dg^2}{d\mu^2} = -\left(\frac{11}{3}N_C - \frac{2}{3}N_F\right)\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)^2 + O(g^6) \tag{6.10}$$

に従うことが，頂点関数および伝搬関数の対数発散部分から得られる．現実的な N_C および N_F のとき右辺は負となるため，高エネルギー領域 $\mu \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}}$ では弱結合 $g(\mu)^2/4\pi \ll 1$ となること，すなわち漸近的自由性は，上の摂動展開がますます有効になるため疑いがない．一方，低エネルギー領域 $\mu \ll \Lambda_{\mathrm{QCD}}$ ではそもそも摂動展開に基づく (6.10) が信頼できず，強結合になることすら解析的には明らかでない．しかし多くの実験的事実および理論的な状況証拠から，低エネルギー領域，あるいは低温・低密度の環境下では QCD は非摂動的な量子効果によって，

質量ギャップ: あらゆる局所演算子の 2 点相関関数 $\langle O(x)O'(x')\rangle$ は，2 点間の距離 $|x-x'|$ の指数関数として減衰する，

色の閉じ込め: ゲージ群の非自明な表現に属する励起は，漸近状態としては現れない，

カイラル対称性の破れ: 無質量クォーク場の左・右ワイル成分を独立にフレーバー間で混合する対称性は，真空期待値 $\left\langle \bar{q}^f q^g \right\rangle$ により自発的に破れる，

という古典論とは著しく異なる性質をもつと信じられている．しかし，真空の構造に関わる上の性質を解析的に証明することは，数学における最も深遠な問題であるリーマン予想の解決と同レベルの重要かつ困難な問題と認識されている*3)．より現象に即した問題としては，低エネルギーでは摂動展開が信頼できないため，クォークの束縛状態である核子や π 中間子など各種のハドロンの質量，中間子の崩壊定数（軸性カレントとの結合定数），真空中でのカイラル凝縮 $\langle\bar{q}q\rangle$ の値などの現象論的諸量を基礎理論である QCD から解析的に導出することが困難であることが挙げられる．以下の節および第 7 章ではランダム行列理論がこれらの問題に与えた寄与について解説する．

6.2 格子ゲージ理論

QCD の理論的な豊かさゆえに生じる上記の問題に対する有力な対策の一つは，ユークリッド化された時空における QCD を有限な格子上の統計力学模型として構成することである[49]．有限自由度系として QCD を厳密に定義しておくことで，極限操作やパラメータによる展開などの解析的扱いを確固とし

*3) クレイ数学研究所は 7 つのミレニアム問題の第 1 番として「任意の単純なゲージ群 G に対して，$\mathbb{R}^4$ 上の量子ヤン–ミルズ理論が存在して質量ギャップ $\Delta > 0$ をもつこと」の証明を[48]，第 2 番としてリーマン予想を挙げている．ゲージ場の量子論の存在自体も証明すべき非自明な問題なのである．

た基盤の上で行うことができる．また，必要に応じて QCD をあたかも金属結晶上のスピン系を扱うように数値シミュレーションに掛けることが可能になる．QCD を d 次元正方格子（格子サイズを L^d ないし $L_s^{d-1} \times L_t$ とする）上で定義するには，まず連続理論における場のローレンツ変換性とゲージ変換性を反映させて，クォーク場としては $\mathrm{SU}(N_C)$ 群の基本表現に属する N_F 種類のグラスマン数スピノル $\psi_x, \bar{\psi}_x$ を格子点 $x = (x_1, \ldots, x_d)$ の各々に，またグルーオン場としては $\mathrm{SU}(N_c)$ 行列 $U_{x,\mu}$ を向きづけられた辺 $\langle x, x+\hat{\mu}\rangle$（$\hat{\mu}$ は $\mu \in \{1, \ldots, d\}$ 方向の単位ベクトルを表す）の各々に載せる（図 6.2）．連続極限で S_{QCD} を導く格子上のゲージ不変な作用は一意的ではないが，最も簡単には

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{L}} &= \beta \,\mathrm{Re} \sum_{\square} \mathrm{tr}\, U_{x,\mu} U_{x+\hat{\mu},\nu} U^{\dagger}_{x+\hat{\nu},\mu} U^{\dagger}_{x,\nu} \\
&\quad + \sum_{\langle x,x'\rangle} \bar{\psi}_x (D_U)_{x,x'} \psi_{x'} - \sum_{x} \bar{\psi}_x M \psi_x
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

ととることができる．ここで $\sum_{\square}$，$\sum_{\langle x,x'\rangle}$，$\sum_x$ は全ての向きづけられた正方形（ブラケット），辺（リンク），および格子点（サイト）に関する総和を表す．4 つの U 行列の積 $U_{x,\mu} U_{x+\hat{\mu},\nu} U^{\dagger}_{x+\hat{\nu},\mu} U^{\dagger}_{x,\nu}$ は格子点 x を始点とする単位ベクトル $\hat{\mu}$ および $\hat{\nu}$ で張られる正方形の 4 辺に載せられた行列を順に掛けたホロノミーである．また D_U は連続理論のディラック演算子 $D_\mu \gamma_\mu$ を格子化した，グルーオン場の配位 $\{U_{x,\mu}\}$ に依存するエルミートな共変差分であり，最も素朴には

$$
(D_U)_{x,x'} = \gamma_\mu (U_{x,\mu} \delta_{x+\hat{\mu},x'} - U^{\dagger}_{x',\mu} \delta_{x-\hat{\mu},x'})/2 \tag{6.12}
$$

で与えられる．しかしこれは 1 階差分演算子であるため，そのフーリエ変換にはブリリュアン域 $(-\pi, \pi]^{\otimes d}$ の境界 $k = (\epsilon_1 \pi, \ldots, \epsilon_d \pi) \neq 0$ $(\epsilon_\mu = 0, 1)$ に，

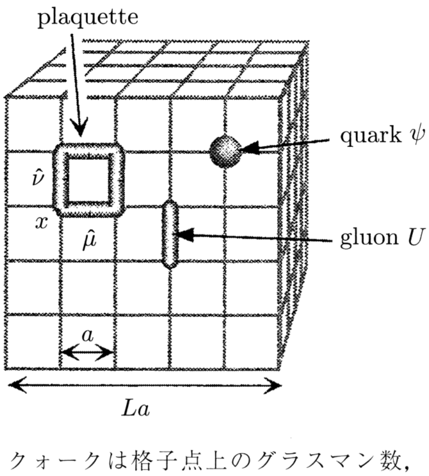


図 6.2　格子 QCD．クォークは格子点上のグラスマン数，グルーオンは辺上の $\mathrm{SU}(N_C)$ 行列であり，それらの四辺形 □ 周りの積がグルーオン場の作用を与える．

格子化に伴う非物理的な 2^d-1 個の 0 点（ダブラーと呼ばれる）が生じてしまう[50]．これを解消するために，ウィルソン型，スタッガード型，オーバーラップ型など種々の修正型格子ディラック演算子が提案されている（例えばウィルソン型では 2 階差分項を加える）が，それらの具体形は他書に譲る[15]．$M=\mathrm{diag}(m_1,\ldots,m_{N_F})$ はクォークの質量行列である．上の格子作用 S_{L} は，連続理論のゲージ対称性 (6.3) を離散化した，各格子点 x ごとに異なるゲージ群の元 $u_x\in\mathrm{SU}(N_C)$ による変換

$$\psi_x\mapsto u_x\,\psi_x,\quad U_{x,\mu}\mapsto u_{x+\hat\mu}U_{x,\mu}u_x^\dagger \tag{6.13}$$

の下での不変性を有している．また，格子間隔 a を導入して辺 $(x,x+\hat\mu)$ 上の行列を単位行列の周りで

$$U_{x,\mu}=I+iA_\mu(x)\,a+O(a^2)$$

と展開し，結合定数を $\beta=2N_C/g_0^2$ と同一視すると，連続極限 $a\to 0$ で格子作用 S_{L} は QCD 作用 (6.1) のユークリッド化

$$S_{\mathrm{QCD}}[A_\mu,q]=\int d^4x\Big\{-\frac{1}{2g_0^2}\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\sum_f\bar q^f\,(\gamma_\mu D_\mu-m_f)\,q^f\Big\} \tag{6.14}$$

に帰着するように構成されている．グラスマン数 $\psi_x,\bar\psi_x$ に関する積分を実行してクォークの寄与を

$$S'_{\mathrm{L}}=\beta\,\mathrm{Re}\sum_{\Box}\mathrm{tr}\,U_{x,\mu}U_{x+\hat\mu,\nu}U^\dagger_{x+\hat\nu,\mu}U^\dagger_{x,\nu}+\sum_f\log\det(D_U-m_f) \tag{6.15}$$

と置き換えれば格子作用は有界な実関数になる．これと $\mathrm{SU}(N)$ の不変測度 dU をあわせて，グルーオン場の配位 $\{U_{x,\mu}\}$ に対する確率測度

$$d\mu[U]=\exp S'_{\mathrm{L}}[U]\cdot\prod_{x,\mu}dU_{x,\mu} \tag{6.16}$$

が定義できる．これが連続理論を近似する実用に堪えるためには，格子理論のゲージ結合定数 β を 2 次臨界点に近づけて格子単位での相関長を大きくすることによって，物理的な格子間隔 a をハドロンのサイズ（数 fm）に比べて十分小さくしつつ，格子の物理的な全長 La はハドロンのサイズより十分大きく設定すればよい．このような状況を実現させた下で，グルーオン場の配位を確率測度 (6.15), (6.16) によるモンテカルロ法で多数生成することにより，原理的には連続理論のあらゆる観測量を初めに与えた数個の微視的パラメータの関数として任意の精度で弾き出すことができる*4)．ただし現実的には計算機のリソースの制限によって統計誤差と系統誤差に妥協を強いられる．格子 QCD の詳細

*4) 実際には逆に，軽いメソンの質量比を正しく与えるようにクォーク質量 m_f を調節する．

と数値シミュレーションの現状については教科書 [14], [15] を参照されたい．

6.3　強結合展開

QCD およびその格子化について最小限の準備が終わったので，本書の主題であるランダム行列，すなわち行列の確率的集団とゲージ場の理論の関わりについて歴史的経緯に従って紹介していく．本章の以下では $N_C = N$ と表記する．

(6.15) および (6.16) で与えられる，$4 \times L^4$ 個（d 次元時空では $d \times L^d$ 個）という膨大な（熱力学極限において無限個となる）数の $\mathrm{SU}(N=3)$ 行列の確率集団は本義の「ランダム行列」と呼ぶには全く不適当である．しかし興味深いことに，この確率測度による期待値がただ 1 個もしくは数個の大ランクの行列集団のそれで代理できる極限的な場合が存在する．以下のそれぞれの場合について，対応するランダム行列集団から得られる解析的結果によってゲージ場の理論の特定の側面が抽出できるのである．

ゲージ理論をランダム行列に帰着させて物理現象の定性的な説明に成功した代表例は，強結合展開でのクォークの閉じ込めの証明[49] であり，そもそもウィルソンが格子上でゲージ理論を構成した動機であると推測される．（クォークを含まない，$N_F = 0$）ピュアな格子ヤン–ミルズ理論における観測可能量は，ゲージ不変性から格子上に描かれたループに随伴するグルーオン場のホロノミー（ウィルソンループ）

$$W(C) = \mathrm{tr}\, U_{x,\mu} U_{x+\hat{\mu},\nu} \cdots U_{x-\hat{\rho},\rho} \tag{6.17}$$

の期待値に限られる．ゲージ結合定数 β^{-1} が十分大きい場合（強結合領域）にはボルツマン重率 $\mathrm{e}^{S_{\mathrm{L}}}$ を β の冪級数に展開することができる．このとき

$$\langle W(C) \rangle = \sum_k \beta^k \int \prod_{\mathrm{link}} dU_{x,\mu}\, W(C) \sum_{\{\Box\}} W(\Box_1) \cdots W(\Box_k) \tag{6.18}$$

となり，リンク変数の積分は指数から分離して各々が $\mathrm{U}(N)$ ランダム行列となる．特に，距離 R だけ離れて時間 T の間静止している重いクォーク–反クォーク対を表す面積 $T \times R$ の長方形ループをとろう．不変測度の性質 $\int dU\, U^i{}_j\, U^{\dagger k}{}_\ell = \delta^i_\ell \delta^k_j / N$ のために上式中の最も主要な項（β の最低次項）はループが $k = TR$ 個の逆向きの正方形によってちょうど覆われる場合であり，

$$\langle W(T \times R) \rangle \propto (\beta/N)^k = \mathrm{e}^{-TR \log(N/\beta)}$$

なる面積則が得られる．この指数部から読み取れる線形ポテンシャル $V(R) = \ln(N/\beta)R$ は一定の張力 $\log(N/\beta)$ で引き合う引力を表している．これは遠方で減衰するクーロン力とは異なり，外部からいかなる仕事を与えて

もクォーク–反クォーク対を準静的に無限に離すことはできない．この強結合展開が有限の収束半径をもつことを証明できるため，重クォークがハドロン内部に閉じ込められ，漸近状態として現れることができない結合定数の領域が存在することが示される．ただし軽いダイナミカルなクォーク場が存在する現実の QCD (6.1) に上の議論は適用できず，色の閉じ込めの証明は依然として未完である．

6.4 ラージ N 極限：2 次元ゲージ理論

ゲージ群 $\mathrm{SU}(N)$ のランクの逆数（実際には $1/N=1/3$）が QCD の隠れた展開パラメータであることを見抜いたのはトフーフト ('t Hooft) の慧眼であった[51]．これに端を発した，「高いランクのゲージ群をもつゲージ理論の非摂動的性質を調べる実験室」としてのランダム行列集団の研究が 1980 年前後に盛んになされ，QCD の強結合領域の定性的理解に貢献した．特にグロス–ウィッテンとワディアは 4 次元の代わりに 2 次元格子上のピュア $\mathrm{U}(N)$ ヤン–ミルズ理論をトーイモデルとして選んだ[52], [53]．d 次元時空におけるゲージ場の物理的自由度はベクトルの d 成分から非物理的な時間成分および縦波成分を除いた $d-2$ である（4 次元時空では 2 つの偏光成分をもつ）ことを考えると，2 次元のヤン–ミルズ理論は時空の各点に置かれた自由度をもたない高々有限自由度系であるから，ランダム行列に帰着することが期待される．

格子作用 (6.11) はそのゲージ不変性 (6.13) のため，格子の辺からなる閉ループをもたない図形上でのグルーオン場を任意の値にゲージ固定してよい．この性質は格子の次元を問わず成立するが，2 次元格子の場合には縦方向の辺上の変数を全て単位行列にゲージ固定することにより，

$$S_{\mathrm{L}}^{(2d)}=\beta\sum_{\text{link pair}}\mathrm{tr}\,U_{x,1}U_{x+\hat{2},1}^{\dagger}+\text{c.c.}$$

と単純化できる．さらに横方向の辺上の変数を $U_{x,1}\mapsto U_{x,1}U_{x+\hat{2},1}$ とゲージ変換すると格子作用は各辺上の変数ごとに完全に分離し，従って格子理論の分配関数 $Z_{\mathrm{L}}=\int d\mu[U]$ は単一のランダムユニタリー行列のそれに帰着する：

$$Z_{\mathrm{L}}^{(2d)}=\left[\int_{\mathrm{U}(N)}dU\,\exp\left(\beta\,\mathrm{tr}\,(U+U^{\dagger})\right)\right]^{L^2}. \tag{6.19}$$

上式中の積分 $z_N(\beta)$ は (5.18) と同一であり，ゲージ群が $\mathrm{U}(1)$ の場合には変形ベッセル関数 $I_0(2\beta)$ (5.20)，一般の $\mathrm{U}(N)$ の場合には $\det\left[I_{i-j}(2\beta)\right]_{i,j=1}^{N}$ (5.28) である．

有限のランクをもつ格子ゲージ理論の分配関数が有限次元の積分に退化し，解析的に計算できてしまうこの例では当然ながら分配関数はゲージ結合定数 β^{-1} の正則関数であり，その近傍で連続極限をとるべき臨界点は存在しない．

連続極限が存在するために必要な非正則性を生み出すためには自由度の数を無限個にする極限を先にとらなければならないが，(6.19) では各辺上の自由度が相互に分離するため，格子のサイズを無限大にしても役に立たない．この他に動かし得るパラメータはゲージ群のランク N のみであるからこれを大きくする極限を考える．このとき分配関数が自明でない結合定数依存性をもつためには β も N に比例してスケールさせ，$\beta = N/\lambda$ とおく（トフーフト極限）．(5.25) と同様に，U の固有値 $\{\mathrm{e}^{i\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{i\theta_N}\}$ によって 1 格子単位あたりの分配関数は

$$z_N(N/\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^{N} \frac{d\theta_i}{2\pi}\, \mathrm{e}^{(2N/\lambda)\cos\theta_i} \prod_{j>k}^{N} \left|\mathrm{e}^{i\theta_j} - \mathrm{e}^{i\theta_k}\right|^2 \tag{6.20}$$

と表される．固有値密度 $\rho(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(\theta-\theta_i)$ を用いると (6.20) の被積分関数は

$$\mathrm{e}^{N^2 S[\rho]},\ \ S[\rho] = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \rho(\theta)\frac{2}{\lambda}\cos\theta + \iint_{-\pi}^{\pi} d\theta d\theta' \rho(\theta)\rho(\theta') P\log\left|\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right|$$

となる．コーシーの主値 P は，(6.20) 中のヤコビアンの 2 重積において $j=k$ はそもそも含まれていないことに由来する．$N\to\infty$ 極限でのこの分配関数の計算には，第 3〜4 章で展開した直交多項式法よりも，単なる鞍点法を用いる方が簡便である．指数部の $S[\rho]$ の極値条件

$$\frac{\delta S[\rho]}{\delta\rho} = \frac{2}{\lambda}\cos\theta + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' \rho(\theta') P\log\left|\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right| = 0,$$

あるいはこれを θ で微分した

$$-\frac{2}{\lambda}\sin\theta + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' \rho(\theta') P\cot\frac{\theta-\theta'}{2} = 0 \tag{6.21}$$

を満たす関数 $\rho(\theta)$ を指数部に代入すればよい．λ が十分大きい場合（強結合領域）には $S[\rho]$ の第 2 項が支配的になり，固有値は単位円周上にほぼ均一に分布するはずである．等式 $\cot(\theta/2) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin n\theta$ を用いると，関数

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi\lambda}\cos\theta \tag{6.22}$$

が (6.21) および規格化条件 $\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\rho(\theta) = 1$ を満たすことを容易に確認できる．ただし固有値密度の最小値 $\rho(\pm\pi)$ が非負であるためには $\lambda \geq 2$ を要する．この臨界値を下回る $\lambda < 2$ の場合（弱結合領域）には固有値が単位円周の一部 $[-\alpha, \alpha]$ にのみ分布するはずであるから，(6.21) 式は

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta' \rho(\theta') P\cot\frac{\theta-\theta'}{2} = \frac{2}{\lambda}\sin\theta \tag{6.23}$$

で置き換えられる．ここでレゾルベント関数

$$G(z) := \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta' \rho(\theta') \cot\frac{z-\theta'}{2} \tag{6.24}$$

を導入する．(5.1) の系として得られる

$$\cot\frac{\theta\mp i\epsilon}{2}\ \stackrel{\epsilon\searrow 0}{\longrightarrow}\ P\cot\frac{\theta}{2}\pm i2\pi\delta(\theta)$$

と (6.23) から，$G(z)$ は性質

$$G(\theta\mp i\epsilon)\stackrel{\epsilon\searrow 0}{\longrightarrow}\begin{cases}\frac{2}{\lambda}\sin\theta\pm i2\pi\rho(\theta) & (|\theta|\le\alpha)\\ 0 & (\alpha<|\theta|\le\pi)\end{cases}\tag{6.25}$$

を満たす．一方，$|z|\to\infty$ $(z\notin\mathbb{R})$ の極限において $\cot z\to\pm 1$ であるから，$G(z)$ 自身も ± 1 に漸近する．この両方の性質をもつ周期 2π の関数は唯一

$$G(z)=\frac{2}{\lambda}\sin z-\frac{4}{\lambda}\cos\frac{z}{2}\sqrt{\sin^2\frac{z}{2}-\frac{\lambda}{2}},\quad ただし\ \alpha=2\arcsin\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$$

のみであるから，その虚部として

$$\rho(\theta)=\frac{2}{\pi\lambda}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}\quad(|\theta|\le\alpha)\tag{6.26}$$

が得られる．固有値密度 (6.22) および (6.26) を $S[\rho]$ に代入することにより，トフーフト結合定数 λ の関数としての自由エネルギーは

$$F(\lambda):=\frac{1}{N^2L^2}\ln Z_{\mathrm{L}}^{(2d)}(\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda^2} & (\lambda\ge 2)\\ \frac{2}{\lambda}+\frac{1}{2}\log\frac{\lambda}{2}-\frac{3}{4} & (\lambda\le 2)\end{cases}\tag{6.27}$$

となる．臨界点 $\lambda_c=2$ での固有値分布の変形（ギャップの発生）に伴って $F(\lambda)$ の 3 階微係数が不連続になるこの相転移 (3 次相転移) を，**グロス–ウィッテン–ワディア相転移**と呼ぶ (図 6.3)．この 3 次相転移は 2 次元ラージ N ゲージ理論と等価なランダムユニタリー行列のみならず，一般にランダム行列の固有値分布が分裂する際には普遍的に起こる．

このように，ラージ N ゲージ理論に現れるランダム行列においては固有値の微視的な相関は直接の関心事ではなく，ウィグナーの半円則に類する大局的な固有値分布が主たる対象となる．なお，この 3 次相転移はラージ N 極限に伴う人工的現象であり，QCD のような有限のランクをもつ物理的なゲージ理論においては存在しないと考えられている．そうであっても，2 次元ゲージ理

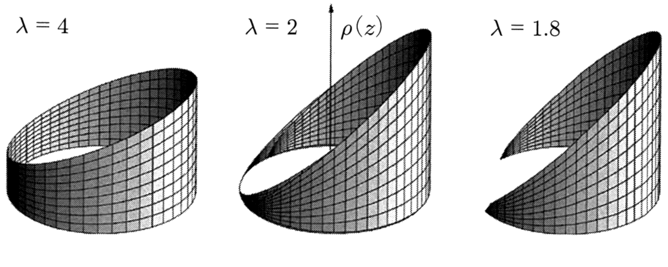


図 6.3　グロス–ウィッテン–ワディア転移[52],[53]．強結合 ($\lambda=4$)，臨界点 ($\lambda=2$)，弱結合 ($\lambda=1.8$) でのランダムユニタリー行列の固有値分布 $\rho(z)$ の変形．

論がもつ有限次元の自由度自体は無限自由度系である高次元ゲージ理論にも大域的自由度として内包されており，従ってこの例はゲージ理論における可能な相転移のメカニズムの一つの類型を提示している点で重要である．

6.5 ラージ N 極限：次元縮小

一方，江口–川合は一般の d 次元の格子上の $\mathrm{U}(N)$ ヤン–ミルズ理論はゲージ群のランク N が無限大になる極限ではただ一つの超立方体上のヤン–ミルズ理論と等価であり，従って熱力学極限が不要であることを一つの仮定のもとで示して衝撃を与えた[54]．後者は d 個のユニタリー行列からなるランダム行列集団に他ならない：

$$d\mu(U) = \exp S_{\mathrm{EK}}(U) \cdot \prod_{\nu=1}^{d} dU_\nu, \tag{6.28}$$

$$S_{\mathrm{EK}}(U_1, \ldots, U_d) = \beta \sum_{\mu \neq \nu}^{d} \mathrm{tr}\, U_\mu U_\nu U_\mu^\dagger U_\nu^\dagger.$$

上の等価性は各々の理論内で全ての観測可能量を再帰的に定める漸化式の $1/N$ 展開の初項が共通であることから従う．ピュアな格子ヤン–ミルズ理論における唯一の観測可能量であるウィルソンループ (6.17) の期待値

$$\langle W(C) \rangle, \quad \langle \cdots \rangle := \int \prod_{x,\mu} dU_{x,\mu}\, \mathrm{e}^{\beta \mathrm{Re} \sum_{\Box} \mathrm{tr}\, U_\cdot U_\cdot U_\cdot^\dagger U_\cdot^\dagger} \cdots \tag{6.29}$$

の間の漸化式を導くにはまず，ループ $W(C)$ 中の点 x の位置に $\mathrm{U}(N)$ の生成子 T^a を挿入した $\langle \mathrm{tr}\, T^a U_{x,\mu} \cdots U_{x-\hat{\rho},\rho} \rangle$ を考える．この量の微小ゲージ変換 $\delta U_{x,\mu} = iT^a U_{x,\mu}$ の下での不変性から，

$$0 = \left\langle \mathrm{tr}\, T^a T^a \overbrace{U_{x,\mu} \cdots U_{x-\hat{\rho},\rho}}^{C} \right\rangle +$$

$$\beta \sum_{\Box} \left\langle \mathrm{tr}\, T^a \overbrace{U_{x,\mu} \cdots U_{x-\hat{\rho},\rho}}^{C} \Big(\mathrm{tr}\, T^a \overbrace{U_{y,\sigma} U_{y+\hat{\sigma},\tau} U_{y+\hat{\tau},\sigma}^\dagger U_{y,\tau}^\dagger}^{\Box} - \mathrm{c.c.} \Big) \right\rangle$$

が得られる．生成子の直交性のために上式は

$$N \langle W(C) \rangle + \beta \textstyle\sum_{\Box} \big(\langle W(C^x \Box) \rangle - \mathrm{c.c.} \big) = 0$$

と，元のループ C および C と正方形 $\Box$ を共有点 x で連結させたループ $C^x\Box$ の間の漸化式になる．ただしループ C が辺 $(x, x+\hat{\mu})$ を複数回通る場合にはこの辺を組み替えた項 $\langle W(C_1) W(C_2) \rangle$ $(C_1{}^x C_2 = C)$ が加わる．$N \to \infty$ 極限での期待値は $\mathrm{U}(N)$ 不変な因子の期待値の積に分解する（因子化）ため，この項は $\langle W(C_1) \rangle \langle W(C_2) \rangle$ と見なせる．次に次元縮小したランダム行列 (6.28)

で同様の操作をすると格子ヤン–ミルズ理論には含まれない組み替え項が多数生み出される．しかし変数 $U_1, \ldots, U_d$ の位相変換の $\mathrm{U}(1)^d$ 対称性が自発的に破れないことを仮定するとこれらの余剰項の各因子は全て零となり，両理論の等価性が示されるのである．

時空の次元の数だけあるランダム行列 $U_1, \ldots, U_d$ を同時対角化することの困難のため，前節で扱った 2 次元の場合を除くと (6.28) の分配関数などを計算する方法は知られていない．一方，N の値を 30 程度にとった 4 次元 $\mathrm{SU}(N)$ 江口–川合模型の数値シミュレーションによると，トフーフト結合定数 N/β を強結合領域から下げるにつれて 2 次元模型と同様な U_μ の固有値分布の分裂と同時に，4 つの U_μ 行列のうち 1 方向の $\mathbb{Z}_N$ *5) 対称性が破れ，さらに残りの方向の行列の $\mathbb{Z}_N$ 対称性も次々と破れる，都合 4 つの相転移点をもつことが知られている[55]．このような豊かな相構造を解析的に探るためには江口–川合模型などの「多ランダム行列における微視的な固有値相関」というほぼ未開の領域を開拓することが喫緊の課題となろう．現在ではゲージ理論を次元縮小したランダム行列集団はラージ N ヤン–ミルズ理論を遥かに超え，超弦理論の構成的定義の有力候補にまで昇華されている[56]．そのランダム行列の確率測度がもつ $\mathrm{U}(N)$ 不変性は元々のゲージ対称性だけではなく，時空自体の局所対称性である一般座標不変性（すなわち重力）をも全て内包するものと解釈される．

6.6 超対称性による局所化

連続理論としてのゲージ場の経路積分が前節のようにラージ N 極限のためではなく，超対称性のために座標に依存しなくなる場合がある．このとき理論はゲージ場行列変数の有限次元積分に帰着（局所化）して厳密解が得られる．このような例としては，

- 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称 $\mathrm{U}(N)$ ゲージ理論におけるウィルソンループのラダー近似[57]．ラージ N 極限と併用すると，GUE のレゾルベント $G(z)$ (5.15) の積分変換が $\langle W(C)\rangle_{\mathrm{ladder}}$ を与える
- $\mathcal{N}=2$ から変形された 4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称 $\mathrm{U}(N)$ ゲージ理論におけるグルーボール超場の有効ポテンシャル[58]．古典的超ポテンシャル $W(\Phi)$ によりゲージ対称性が $\mathrm{U}(N) \to \otimes_{i=1}^{n} \mathrm{U}(N_i)$ と破れるとき，複素行列 Φ にわたる正則な積分 $\int (d\Phi)\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{g_s}\mathrm{tr}\, W(\Phi)}$ において N_i 個の固有値が $W(\Phi)$ の i 番目の臨界点に集積する配位の寄与が，各部分群因子に対応するカイラル超場 $\{S_i\} = \{g_s N_i\}$ の有効超ポテンシャルを与える

---

*5) 変換 $U_\mu \to \mathrm{e}^{2\pi i n/N} U_\mu$．元の $\mathrm{U}(N)$ 江口–川合模型における $\mathrm{U}(1)$ 変換の，$\mathrm{SU}(N)$ ゲージ群の場合の対応物である．

- Ω 変形と呼ばれる正則化がなされた 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論の分配関数[59] および 2 次元 $\mathcal{N}=2$ リウヴィユ理論のカイラル相関関数（AGT 対応）[60]．ともに重みを $\mathrm{e}^{-V(\lambda)}=\lambda^a(1-\lambda)^b(\lambda-q)^c$ とした積分 (2.17)（q-セルバーグ積分）で与えられる．両理論の背後にある高次元の構造である B 模型トポロジカル弦理論が行列積分に局所化することに起因する[61]

- 超対称性をもたない 3 次元チャーン–サイモンズ (CS) 理論．$\mathcal{N}=1$ 超対称性をもつ CS 理論と自明に等価であり，ゲージ群 $\mathrm{U}(N)_k$（k は CS 結合定数）の場合に S^3 上の分配関数は $\{\mathrm{e}^{\lambda_i}\}$ のファンデアモンド行列式を含む N 重積分

$$Z_{\mathrm{CS}}(N,k)=\frac{1}{N!}\int\prod_{i=1}^{N}\frac{d\lambda_i}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda_i^2}{2g_s}}\prod_{i>j}^{N}\left(2\sinh\frac{\lambda_i-\lambda_j}{2}\right)^2 \qquad (6.30)$$

  ($g_s=2\pi i/k$) に局所化する[62]．変数変換 $\lambda_i\mapsto x_i=\mathrm{e}^{\lambda_i}$ を行えば，上記積分は移動度端での臨界準位統計を記述する 2 乗対数ポテンシャル $V(x)=\frac{1}{2g_s}(\log x)^2$ をもつスティルチェス–ウィガート行列集団に他ならない（7.9 節，(7.62)）

- ゲージ群 $\mathrm{U}(N)_k\times\mathrm{U}(N)_{-k}$ をもつ 3 次元 $\mathcal{N}=6$ 超対称 CS 物質理論（ABJM 模型：$(N,\bar{N})$ および $(\bar{N},N)$ 表現の双線形カイラル超場を 2 種ずつ含む箙ゲージ理論）[63]．S^3 上の理論の分配関数は (6.30) を超行列型に拡張した $2N$ 重積分

$$Z_{\mathrm{ABJM}}(N,k)=$$
$$\frac{1}{N!}\int\prod_{i=1}^{N}\frac{d\lambda_i}{2\pi}\frac{d\mu_i}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda_i^2-\mu_i^2}{2g_s}}\frac{\prod_{i>j}^{N}\left(2\sinh\frac{\lambda_i-\lambda_j}{2}\right)^2\left(2\sinh\frac{\mu_i-\mu_j}{2}\right)^2}{\prod_{i,j=1}^{N}\left(2\cosh\frac{\lambda_i-\mu_j}{2}\right)^2} \qquad (6.31)$$

  に局所化し[64]，大分配関数 $\sum_{N=0}^{\infty}(-\xi)^N Z_{\mathrm{ABJM}}(N,k)$ は対応するカーネルのフレドホルム行列式 (3.18) で表される[65]

など多くが知られている．しかしこの応用は本書の主対象を外れるため紹介のみに留め，詳細は原論文を参照されたい．

第 7 章

ディラック準位統計

QCD の低温相では，作用が有するカイラル対称性の自発的な破れがハドロンの質量スペクトルや崩壊定数などの物理量に支配的な影響を与える．本章ではランダム行列のゲージ理論への現代的な応用例として，カイラル対称性の自発的な破れへのプローブとして QCD に対する 2 つの非摂動的手法である格子ゲージ理論とカイラル有効理論を橋渡しする「カイラルランダム行列」について解説する．

7.1 カイラル対称性の自発的破れ

本章では便宜上，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ 上の QCD を考える．作用 (6.14) のクォーク部分を左・右巻きワイル成分で表すと*1)，

$$\sum_{f=1}^{N_F}\left\{q_L^{f\dagger}\sigma_\mu D_\mu q_L^f + q_R^{f\dagger}\sigma_\mu^\dagger D_\mu q_R^f - m_f q_R^{f\dagger} q_L^f - m_f^* q_L^{f\dagger} q_R^f)\right\} \tag{7.1}$$

となる*2)．第 1, 2 項はフレーバー f についてそれぞれ複素内積形になっているため，全てのクォークが無質量の場合に作用は N_F 種類の左・右巻きクォーク場をそれぞれ独立に混合する大域的変換

$$q_L^f \mapsto U_L^{fg} q_L^g,\ q_R^f \mapsto U_R^{fg} q_R^g,\ \ (U_L, U_R) \in \mathrm{U}(N_F) \times \mathrm{U}(N_F) \tag{7.2}$$

の下で不変になる．しかし，ゲージ場背景中のクォーク場に対する，ゲージ不変に正則化された経路積分測度 $\mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q$ は，(7.2) の部分群である $\mathrm{U}(1)_A$ 変換 $q_L \mapsto \mathrm{e}^{i\alpha}\,q_L$, $q_R \mapsto \mathrm{e}^{-i\alpha}\,q_R$ の下で

$$\mathcal{D}\bar{q}^f\mathcal{D}q^f \mapsto \mathrm{e}^{2i\alpha Q[A_\mu]}\,\mathcal{D}\bar{q}^f\mathcal{D}q^f \quad (1\ \text{つのフレーバーについて}) \tag{7.3}$$

---

*1) γ_μ 行列の左下ブロックに現れる単位行列とパウリ行列を纏めて $\sigma_\mu := (I, i\boldsymbol{\sigma})$ と記した．

*2) 結合定数としての m_f には複素数値を許し（物理的な質量は $|m_f|$），第 3 項と第 4 項が互いにエルミート共役になるようにした．

と変化するため[10]，$\mathrm{U}(1)_A$ 対称性は露わに破れている（軸性アノマリー）．経路積分 (6.6) 中の N_F 対の積分変数 (q_L^f, q_R^f) に変換 (7.3) を施すことにより，分配関数の θ と m_f への依存性が

$$Z(\theta, \{m_f\}) = Z(\theta + 2N_F\alpha, \{\mathrm{e}^{2i\alpha}\, m_f\}) = Z(0, \{\mathrm{e}^{-i\theta/N_F}\, m_f\}) \quad (7.4)$$

と連動することがわかる*3)．また，全てのクォーク場に共通の位相を掛ける変換はバリオン数をネター荷電とする $\mathrm{U}(1)_V$ 対称性であり，これは常に保たれるように量子化されるため以下の議論からは除外して，大域的変換としては縮小された

$$(U_L, U_R) \in \mathrm{SU}(N_F) \times \mathrm{SU}(N_F) \quad (7.5)$$

を考える．$m_f \equiv 0$ の場合の QCD 作用の対称性 (7.5) を**カイラル対称性**と呼ぶ．また，無質量でなくとも全てのクォーク質量が縮退しているとき $(m_f \equiv m)$ には，(7.5) で $U_L = U_R = U$ とした変換（ベクトル部分群）

$$q_L^f \mapsto U^{fg} q_L^g,\ q_R^f \mapsto U^{fg} q_R^g,\quad U \in \mathrm{SU}(N_F) \quad (7.6)$$

の下での不変性は保たれる*4)．

金属の低温相である超伝導体では格子振動が媒介する引力によって互いに逆向きの運動量をもつ 2 つの電子の場の積（クーパー対）が期待値を獲得している．これが U(1) ゲージ対称性を自発的に破るために光子に実効質量が生じて，超伝導体内部にはロンドン長を超えて磁場が侵入できなくなる（マイスナー効果）．一方，前章で述べたように QCD の低エネルギー領域ではゲージ場が強結合になることが繰り込み群方程式から推定されるが，そうであれば同様の現象が QCD の低温相で生じないであろうか？ ただし物性論とは異なり QCD ではゲージ対称性の自発的破れは想定されず，またポアンカレ不変性を破る量は真空期待値をもてないので，理論のパリティ不変性と合わせると考えられる凝縮はクォーク双線形形式のうちスカラーである

$$\Sigma^{fg} := \left\langle \bar{q}^f q^g \right\rangle = \left\langle q_L^{f\,\dagger} q_R^g + q_R^{f\,\dagger} q_L^g \right\rangle \quad (7.7)$$

のみである（ゲージ群の添字については縮約されている）．一方，u, d クォークのカレント質量（数 MeV）は理論の典型的スケール $\Lambda_{\mathrm{QCD}} \sim 300\,\mathrm{MeV}$ に比して桁違いに小さいため，これを無視すれば QCD は (7.5) で $N_F = 2$ としたカイラル対称性 $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R$ をもつといえる．もし縮退した質量項と同じ形であるカイラル凝縮 (7.7) が生じれば，カイラル対称性は自発的にそのベ

---

*3) 各フレーバー毎に軸性 U(1) 変換を行えば $Z(\theta, \{m_f\}) = Z(\theta_{\mathrm{tot}}, \{|m_f|\})$，$\theta_{\mathrm{tot}} = \theta - \sum_f \arg m_f$ とも書ける．ゲージ場に固有の θ と，各フレーバーとヒッグス場との湯川結合に由来する $\arg m_f$ の和が引き起こす CP 対称性の破れが，実験的には 0 と矛盾がないように微調整されている ($|\theta_{\mathrm{tot}}| < 10^{-10}$) ことの説明は未解決である（強 CP 問題）．

*4) (7.5), (7.6) に現れた 3 つの $\mathrm{SU}(N_F)$ 群を，添字 L, R, V で区別する．

クトル部分群 $\mathrm{SU}(2)_V$ に自発的に破れることになる．対称性を破る秩序変数場 $\Sigma^{fg}(x) \neq 0$ が剰余空間 $G/H = (\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R)/\mathrm{SU}(2)_V = \mathrm{SU}(2)_A$ 中で向く方向が空間の各点 x でほぼ同期しながら揺らぐ集団励起モードは質量ギャップがない（南部–ゴールドストーンの定理）*5) ので，G/H の次元 3 と等しい数の無質量の励起が理論に存在しなければならない．ハドロンの中で最も軽い π 中間子の 3 重項 $(\pi^{\pm}, \pi^0)$, $m_\pi^2 \sim (140\,\mathrm{MeV})^2$（図 7.1）はそれ以外の中間子 $m^2 \sim (1\,\mathrm{GeV})^2$ の 2% の 2 乗質量しかもたずほぼ無質量と考えれば，確かに近似的カイラル対称性の自発的破れに伴う擬南部–ゴールドストーン (NG) ボソンと同定でき，辻褄が合う．

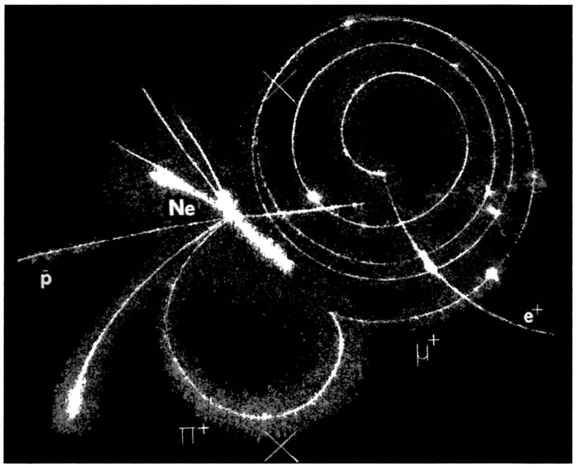


図 7.1　π 中間子の生成と崩壊．反陽子 ($\bar{\mathrm{p}}$) が泡箱に充満したネオン原子核 (Ne) 中の陽子と衝突し，強い相互作用により π 中間子 (π^+) などを生成する．π 中間子は弱い相互作用により，ミューオン (μ^+, $m_\mu = 105\mathrm{MeV}$) とニュートリノに，さらにミューオンは陽電子 (e^+, $m_\mathrm{e} = 0.5\mathrm{MeV}$) と 2 つのニュートリノに崩壊する（ニュートリノは電荷をもたず軌跡を残さない）．©CERN

7.2　バンクス–キャシャ公式

南部は前節の考察から，強い相互作用においてカイラル対称性の自発的破れが起こっていることを推定したが，自発的破れを定量的に特徴付けるにはどのような物理量を観測すればよいだろうか．これに対する答えが以下の定理である：

定理 7.1（バンクス–キャシャ[66]）　カイラル凝縮はディラック演算子の状態密度により

$$\Sigma = \pi\bar{\varrho}(0), \quad \bar{\varrho}(\lambda) := \lim_{m\searrow 0}\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\sum_k \langle\delta(\lambda-\lambda_k)\rangle \tag{7.8}$$

*5)　南部–ゴールドストーンの定理の簡単な証明は文献 [11] を見よ．

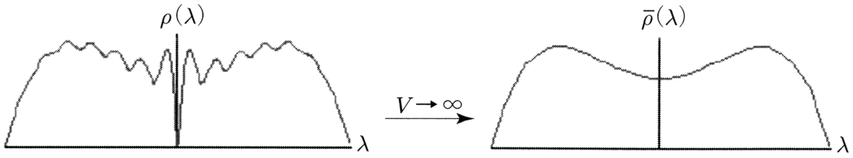


図 7.2　有限体積（左）および熱力学極限（右）でのディラック準位密度の概念図．熱力学極限での切片 $\bar{\rho}(0)$ がカイラル凝縮を与える．

と表される．

[証明] 上では計算の最後で熱力学極限 $\to$ 無質量極限に移行することを前提に，縮退した実のクォーク質量 m をもつ，有限体積 V 中での QCD を考えている．あるフレーバーの凝縮の大きさは*6)，

$$\Sigma := \left|\left\langle \bar{q}^f(x) q^f(x) \right\rangle\right| \quad (f \text{ は和をとらない}), \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \bar{q}^f(x) q^f(x) \right\rangle &= \frac{1}{V}\int d^4x \left\langle \bar{q}^f(x) q^f(x) \right\rangle \\
&= \frac{1}{V}\int d^4x \left\langle \langle x|\left(\not{D} - m\right)^{-1}|x\rangle \right\rangle = \frac{1}{V}\left\langle \mathrm{Tr}\left(\not{D} - m\right)^{-1} \right\rangle \\
&= \frac{1}{V}\left\langle \sum_k \frac{1}{i\lambda_k - m} \right\rangle \\
&= -\frac{1}{V}\left\langle \sum_k \frac{m}{\lambda_k^2 + m^2} \right\rangle = -\int_{|\lambda|\le\Lambda} d\lambda\, \bar{\rho}(\lambda) \frac{m}{\lambda^2 + m^2},
\end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\bar{\rho}(\lambda) := \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V}\sum_k \left\langle \delta(\lambda - \lambda_k) \right\rangle. \tag{7.11}$$

上式の第 2 行への移行では，固定されたゲージ場背景中でのクォーク場の伝搬関数が $\langle x|\left(\not{D} - m\right)^{-1}|x'\rangle$ となることを用いた．また第 3 行への移行では，座標の固有状態の完全系 $\{|x\rangle\}$ の代わりに，反エルミートであるユークリッド的ディラック演算子 $\not{D} = \gamma_\mu D_\mu$ の固有状態の完全系 $\{|\lambda_k\rangle\}$, $\not{D}|\lambda_k\rangle = i\lambda_k|\lambda_k\rangle$ を用いて汎関数トレースを表示した．第 4 行への移行では，反交換性 $\{\not{D}, \gamma_5\} = 0$ から $\not{D}\gamma_5|\lambda_k\rangle = -i\lambda_k\,\gamma_5|\lambda_k\rangle$ となり，0 でない $\not{D}$ の固有値は複素共役の対で生じることを用いた．理論のカットオフスケール Λ は $\lambda \sim 0$ での性質には影響しない．(7.10) に (5.1) の虚部を適用して定理が得られる．□

上の導出において極限の順番は重要である．先に熱力学極限 $V \to \infty$ をとることによって固有値が原点近傍に稠密に分布し，スケールされていない固有値変数 λ の関数としての状態密度は，滑らかな連続関数 (7.11) に移行する．この後で無質量極限 $m \to 0$（カイラル極限とも呼ぶ）をとることにより $\lambda \to 0$ が課されるが，この連続関数（の無質量版）は 0 でない切片をもち得る

*6)　ベクトル型の作用をもつ理論において，ベクトル型対称性 $\mathrm{SU}(N_F)_V$ は自発的に破れない[67] ため，Σ はフレーバーの種類 f にはよらない．

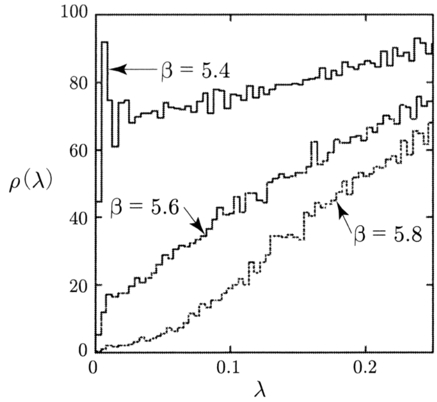


図 7.3　格子ゲージ理論 ($N_C = 3, N_F = 0, V = (4a)^4$) で測定されたディラック準位密度．カイラル対称性が自発的に破れた相 ($\beta = 5.4$)，保たれた相 ($\beta = 5.8$)，および両者の臨界点 ($\beta = 5.6$)[68]．

(図 7.2)*7)．ゲージ場が存在しない場合，辺長 L の超立方体中のディラック演算子の固有状態は平面波

$$\langle x|\lambda_k\rangle \propto \mathrm{e}^{ipx},\ \lambda_k^2 = p^2,\ p_\mu = \frac{2\pi}{L}k_\mu,\quad k_\mu \in \mathbb{Z} \text{ か } \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\quad \text{(境界条件による)}$$

であるから，ディラック固有値の間隔は $O(L^{-1}) = O(V^{-1/4})$ となる．このとき熱力学極限では $\bar{\rho}(0) = O(V^{1/4}/V) \to 0$ となりカイラル対称性は保たれることになる．従ってカイラル対称性の自発的破れは自由場の周りの摂動展開では説明できず，非摂動効果によって原点近傍にディラック固有値が狭い間隔 $O(V^{-1})$ で集積するときにのみ秩序変数 Σ が非零になり破れが引き起こされる (図 7.3)．

7.3　カイラル有効理論

カイラルフレーバー対称性が自発的に破れることと，色荷をもつグルーオンとクォークは閉じ込められて漸近的に現れないことを認めれば，低エネルギー領域

$$p \sim L^{-1} \ll \Lambda_{\mathrm{QCD}} \tag{7.12}$$

の QCD では実質的に擬 NG ボゾンである π 中間子のみを考えればよい．その作用は，基礎理論である QCD のダイナミクスには直接依存せず，カイラル対称性によって強い制限を受けることを述べるのが次の定理である．

*7)　仮に逆順で行うと：複素共役の固有値対間の準位反撥によって，有限体積中では原点の ϵ 近傍に分布する固有値の密度はいくらでも小さくなり，$\lim_{m\to 0}\sum_k \langle\delta(\lambda-\lambda_k)\rangle = 0$ となってしまう．

定理 7.2（カイラルラグランジアン） 擬 NG ボゾン場を $U(x) \in \mathrm{SU}(N_F)$, クォーク質量行列を M とすると，擬 NG ボゾンの有効作用は，変換

$$\begin{array}{ccc} U(x) & \mapsto & U_L U(x) U_R^\dagger \\ M & \mapsto & U_R M U_L^\dagger \end{array}, \quad (U_L, U_R) \in \mathrm{SU}(N_F) \times \mathrm{SU}(N_F) \tag{7.13}$$

の下で不変である．

[証明] QCD 作用のなかでクォーク部分 (7.1) の質量項 $q_R^{f\dagger} M^{fg} q_L^g + q_L^{g\dagger} M^{\dagger gf} q_R^f$ のみはカイラル変換 (7.2) の下で不変ではないが，定数行列 M を複素行列値の重いスカラー場 $M(x)$ の真空期待値であると仮想的に考えて場の変換性 (7.13 下) を付与すれば不変になる．一方，擬 NG ボゾン場 $U^{fg}(x)$ はクォーク–反クォーク凝縮 $q_R^{g\dagger} q_L^f$ の角度成分の揺らぎであるから，凝縮と同一の変換性 (7.13 上) を有する．$(A_\mu, q, \bar{q}, M)$ を場の自由度とする基礎理論の作用が (7.2)，(7.13 下) のもとで不変であるから，これを別の場の自由度の組 (U, M) で代理する有効理論が存在すればその作用は対応する変換 (7.13 上, 下) のもとで不変でなければならない．□

上の定理により，ローレンツ不変性を考慮すると Λ_{QCD} 以下での QCD の有効理論のラグランジアンは U 場と M 場からなる

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\,\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U, (\mathrm{tr}\,\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U)^2, \mathrm{tr}\,\partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U, \mathrm{tr}\,\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \partial_\nu U, \\ &\mathrm{tr}\,MU, \mathrm{tr}\,MU\,\mathrm{tr}\,\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U, \mathrm{tr}\,MU \partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U, \ldots, \mathrm{tr}(MU)^2 \end{aligned} \tag{7.14}$$

などの不変量の線形結合の実部・虚部に限られる．なお「M 場」は実際には定数行列であるからその微分を含む項は (7.14) から省いてあり，また最後に (7.4) に従って

$$M(x) \to M = \mathrm{e}^{-i\theta/N_F}\,\tilde{M}, \quad \tilde{M} := \mathrm{diag}(m_1, \ldots, m_{N_F}) \tag{7.15}$$

と置き換えるものとする．擬 NG ボゾン場の運動量 $p_\mu \sim i\partial_\mu$ およびクォーク質量 M を展開パラメータと考えると，展開の各次数に寄与する項は有限個であるから同数個の実験データからその係数を逐次決定することができる（カイラル摂動論）．特に p_μ と M のそれぞれの最低次の項は $\mathrm{tr}\,\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U$ と $\mathrm{tr}\,MU$ であり，これら 2 項の線形和の実部

$$S_{\mathrm{W}}[U] = \int d^4x \left\{ \frac{F^2}{4}\,\mathrm{tr}\,\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U - \Sigma\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,MU \right\} \tag{7.16}$$

が低エネルギー極限での主要項を与える（ワインバーグのラグランジアン[13]）．この 2 項が同じオーダーの微小量 ($O(p^2) = O(m^1)$) となる運動量領域を $\boldsymbol{p}$ **領域**と呼ぶと，次のオーダーで線形独立な項は (7.14) 中の残りの 8 項であり，それらの係数を $L_1, \ldots, L_8$ と記す（ガッサー–ロイトヴァイラーのラグランジアン[69]）．ここで F^2, Σ, L_k などは対称性からは決定できない結合定数であり，

QCD の低エネルギー定数と呼ばれる．有効理論の質量項の係数に (7.9) で定義した Σ を充てて $\Sigma\,\mathrm{tr}\,MU$ と記したのは，（複素数の極表示 $z = r \cdot \mathrm{e}^{i\phi}$ のごとく）$\Sigma \cdot U^{fg}$ をクォーク場の双線形形式 $q_R^g{}^\dagger q_L^f$ の (絶対値)$\cdot$(方向) と同定すると，この項がちょうど基礎理論の質量項 $\mathrm{tr}(Mq_R{}^\dagger q_L)$ と一致するためである．F は（カイラル極限における）NG ボゾンの崩壊定数と呼ばれる．

全てのクォークが縮退した正の m をもつ場合 $(M = mI_{N_F})$ を考えると，NG 場の基底状態は (7.16) のポテンシャル項 $-\Sigma m\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U$ を極小化する $U = I_{N_F}$ である．時空のサイズが無限大であるか，あるいは有限であっても擬 NG 場の揺らぎの波長より十分大きい場合には，p 領域ではこの極小値の周りで擬 NG 場が緩やかに揺らぐという摂動的描像が成り立つ．このとき $U(x) = \mathrm{e}^{i2\pi_a(x)T_a/F}$ とおいて展開すると*8)，

$$S_{\mathrm{W}}[\pi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi_a)^2 + \frac{\Sigma m}{F^2}(\pi_a)^2 + \cdots \right\}$$

となり，擬 NG ボゾンの質量が低エネルギー定数と $m_\pi^2 = 2\Sigma m/F^2$ で結ばれることが読み取れる（ゲルマン–オークス–レナーの関係式）．有効ラグランジアンの展開の高次の項からは擬 NG ボゾンの自己相互作用を読み取ることができる．このように，p 領域においては QCD の強結合ダイナミクスを直接解くという難題を回避して，カイラル対称性の自発的破れのみから任意の展開次数での有効理論が（実験で測定すべき有限個の未定定数を除いて）決定される．このアプローチは p^2 および m^1 についての展開であり，基礎理論である QCD の結合定数 g^2 による摂動展開ではない点において非摂動的手法であるが，そもそも有効理論の形は基礎理論の詳細（ゲージ群のランク N_C が $3, 4, 5, \ldots$ か，あるいはそもそもゲージ場を含まず 4 体フェルミ相互作用をもつ南部–ヨナラシニオ模型か，など）によらない．基礎理論のもつ近似的な大域的対称性とその破れが $\mathrm{SU}(N_F)_L \times \mathrm{SU}(N_F)_R \to \mathrm{SU}(N_F)_V$ であってそれを僅かに破る質量項が $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,q_R^\dagger M q_L$ の形であり，かつ擬 NG ボゾン以外の軽い励起が存在しないならば，最低エネルギー領域での有効理論は必ず (7.14) などの項で構成される同一な形をとり（普遍性），基礎理論の情報は低エネルギー定数 $F^2, \Sigma, \ldots$ を通じてのみ入る．この意味において，低エネルギーで重要な対称性は**ゲージ対称性ではなく，大域的対称性である．**

7.4　ε 領域

前節で述べた低エネルギー有効理論の普遍性と，量子準位統計の普遍性（5.4 節）が同一の物理現象であることを明らかにするため，擬 NG ボゾンのカイラル有効理論が QCD を代理する低エネルギー領域 $p \sim L^{-1} \ll \Lambda_{\mathrm{QCD}}$ において

*8)　T_a $(a = 1, \ldots, N_F^2 - 1)$ は $\mathrm{SU}(N_F)$ の規格化された生成子，$\mathrm{tr}\,T_aT_b = \delta_{ab}/2$，を表す．

若干非物理的な状況を想定しよう．クォーク質量が十分小さいために擬 NG 場の揺らぎのコンプトン波長 m_π^{-1} が時空（格子）のサイズ $L \sim V^{-1/4}$ より十分大きい場合，すなわち

$$\frac{1}{\Lambda_{\mathrm{QCD}}} \ll L \ll \frac{F}{\sqrt{\Sigma m}} \tag{7.17}$$

を考え，この状況を **$\boldsymbol{\varepsilon}$ 領域**と呼ぶ．クォーク質量が満たす条件は

$$m \ll \frac{F^2}{\Sigma\sqrt{V}} \tag{7.18}$$

である．このときに次の著しい単純化が成り立つ：

定理 7.3（シュリャック–フェアバースホット[70]） ε 領域での QCD の分配関数は，カイラル GUE の特性多項式の微視的極限と一致する．

[証明] ワインバーグ作用の経路積分を擬 NG 場のフーリエ級数展開 $U(x) = \sum_p U_p \, \mathrm{e}^{ipx}$ のうちの定数モード（零モード）U_0 と非零モード U_p $(p = 2\pi k/L, \ k \in \mathbb{Z}^4 \setminus \{0\})$ に分離して記すと，

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{W}} &= \int DU \ \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{W}}[U]} \\ &= \int dU_0 \ \mathrm{e}^{V\Sigma \,\mathrm{Re\,tr}\, MU_0} \int \prod_{p\neq 0} dU_p \ \mathrm{e}^{-(VF^2/4)p^2 \,\mathrm{tr}\, U_p U_{-p} + \cdots} . \end{aligned} \tag{7.19}$$

上式の零モード部分の指数のオーダーは $V\Sigma m \sim Vm_\pi^2 F^2$，非零モード部分の指数のオーダーは $VF^2(2\pi/L)^2$ であるから，不等式 $m_\pi^{-1} \gg L$ が成り立つ ε 領域では後者は前者と比べて圧倒的に大きい．従って，ガウス型因子 $\prod_{p\neq 0} \mathrm{e}^{-(VF^2/4)p^2 \,\mathrm{tr}\, U_p U_{-p}}$ は（前者の因子と相対的には）デルタ関数 $\prod_{p\neq 0} \delta(U_p)$ と見なせる．このため，経路積分は零モードに関する有限次元積分

$$Z = \int_{\mathrm{SU}(N_F)} dU_0 \ \mathrm{e}^{V\Sigma \,\mathrm{Re\,tr}\, MU_0} \tag{7.20}$$

に帰着する．(7.15) によって θ 角依存性を明示すると

$$Z(\theta) = \int_{\mathrm{SU}(N_F)} dU_0 \ \mathrm{e}^{V\Sigma \,\mathrm{Re\,tr}\, \tilde{M} \,\mathrm{e}^{-i\theta/N_F}\, U_0} \tag{7.21}$$

である．(6.7) を用いて逆フーリエ変換すれば，ゲージ場がトポロジカル荷電 $Q[A_\mu] = \nu$ をもつセクターでの分配関数が

$$Z_\nu = \oint \frac{d\theta}{2\pi} \,\mathrm{e}^{-i\nu\theta}\, Z(\theta) = \int_{\mathrm{U}(N_F)} dU \,(\det U)^\nu \,\mathrm{e}^{V\Sigma \,\mathrm{Re\,tr}\, \tilde{M}U} \tag{7.22}$$

と表される．これは $n = N_F, x_f = V\Sigma m_f$ としたカイラル GUE の特性多項式の微視的極限 (5.23) に他ならない．□

ここでの A 型の非線形 σ 模型の現れを遡ると，基礎理論の運動項中で左・右巻き成分が独立であることと等価であるディラック演算子の AIII 型対合的対称性（ブロック非対角性）$\{i\not{D}, \gamma_5\} = 0$ に起因することが理解できよう．この事実は 5.6 節表 5.1 および 5.7 節と整合している．カイラル GUE の特性多項式の積 $\prod_f \det \left[m_f - i \begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^\dagger & 0 \end{pmatrix} \right]$ を確率測度に取り込んで，新たにブロック型行列

$$H = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \ Z \in \mathbb{C}^{N\times(N+\nu)} \tag{7.23}$$

を確率測度

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}^{-1}(dH)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr} H^2} \prod_{f=1}^{n} \det(iH - m_f) \\ &= \mathcal{Z}^{-1}(dZ)\,\mathrm{e}^{-\operatorname{tr} Z^\dagger Z} \prod_{f=1}^{n} \det \begin{pmatrix} -m_f & iZ \\ iZ^\dagger & -m_f \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.24}$$

に従って分布する確率変数と考えれば，上の定理はこのランダム行列集団（有質量カイラル GUE）の微視的極限と QCD の有効理論の ε 領域での分配関数同士が一致し，ともに (5.26) で与えられることを述べている．この一致の根本的理由は，5.5 節でランダム行列側について述べたように，**有質量カイラル GUE は QCD と同一のカイラル対称性の破れを起こす基礎理論の族**の一員である

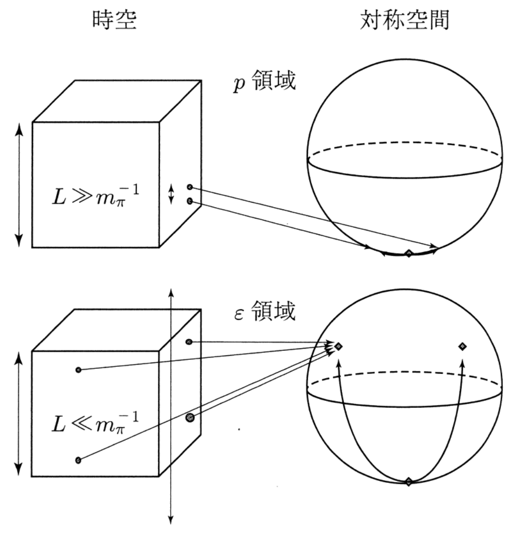


図 7.4　p 領域と ε 領域．前者：擬 NG ボソンの波長 m_π^{-1} が系のサイズ L より十分小さく，場はポテンシャルの最小値の周りで空間的に僅かに揺らぐ．後者：擬 NG ボソンの波長が系のサイズを超え，場の零モードが対称空間全体を動く．

ことにある．ランダム行列 H の確率測度 (7.24) をトポロジカル荷電 ν をもつ QCD ディラック演算子 $\not{D}$ の確率測度（Z_ν (6.7) のユークリッド化）と比較すると，前者は後者がもつカイラルフレーバー対称性（Det 部分）のみを保ち，$\not{D}$ における座標，スピノル成分，カラー成分の一切の情報を捨象して複素ガウス型乱数で置き換えたランダム行列集団であるといえる．$\nu > 0$ とすると (7.23) の形から H のランクは $2N+\nu$ ではなく $2N$ であるから（(2.21) 参照），H は N 個の固有値対 $\pm\lambda_i$ に加えて ν 個の '左巻き' 零モード $(\overbrace{\#,\ldots,\#}^{N+\nu},\overbrace{0,\ldots,0}^{N})^T$ をもち，ディラック演算子 $\not{D}$ が満たす指数定理 (6.9) を確かに満たしている．

7.5 微視的準位相関

あるトポロジカル荷電 ν をもつセクターの QCD の分配関数は，カイラル対称性の自発的破れだけを仮定すれば ε 領域において有質量カイラル GUE (7.24) のそれで代理されることがわかった．物理的な N_F 種類のクォークの他に，仮想的に n 種類の縮退した質量 m をもつクォークを導入すると，QCD 側の分配関数は（ν 依存性は省略）

$$\Xi_n^{\mathrm{QCD}}(\{m_f\};m)$$
$$:= \int_{Q[A]=\nu} \frac{\mathcal{D}A_\mu}{(\mathrm{gauge})}\,\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{YM}}[A]}\,\mathrm{Det}\,(\not{D}-m)^n \prod_{f=1}^{N_F} \mathrm{Det}\,(\not{D}-m_f)\,,$$

対応する有質量カイラル GUE の分配関数は N_F+n フレーバーをもつ

$$\Xi_n^{\mathrm{chGUE}}(\{m_f\};m) := \int dH\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,H^2}\,\det(iH-m)^n \prod_{f=1}^{N_F} \det(iH-m_f)$$

となる（H は (7.23) の形）．定理 8.3 により，固定するスケーリング変数を $V\Sigma m$（QCD 側）$= 2\sqrt{N}m$（chGUE 側）にとると上の仮定・領域のもとでの熱力学極限で両者は一致するから，レプリカ法 (5.3) で得られる $\not{D}$ および iH のレゾルベント

$$G_{\not{D}}(\{m_f\};m) := \left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{m-\not{D}} \right\rangle_{\mathrm{QCD}} = \lim_{n\to 0}\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial m}\Xi_n^{\mathrm{QCD}}(\{m_f\};m),$$
$$G_H(\{m_f\};m) := \left\langle \mathrm{tr}\,\frac{1}{m-iH} \right\rangle_{\mathrm{chGUE}} = \lim_{n\to 0}\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial m}\Xi_n^{\mathrm{chGUE}}(\{m_f\};m)$$

の微視的極限も一致し，(5.2) を用いて $-i\not{D}$ と H の微視的固有値密度

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\lim_{V\to\infty} G_{\not{D}}\Big(\Big\{\frac{\mu_f}{V\Sigma}\Big\};\frac{ix_-}{V\Sigma}\Big),\ \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\lim_{N\to\infty} G_H\Big(\Big\{\frac{\mu_f}{2\sqrt{N}}\Big\};\frac{ix_-}{2\sqrt{N}}\Big) \quad (7.25)$$

も一致する[*9)]．単独の特性多項式の代わりに複数の積 $\prod_{a=1}^{k}\det(iH-m_a)^{n_a}$

などを挿入してレプリカ極限 $n_a \to 0$ をとれば，両者の固有値の k 点相関関数も同様に一致する．従って，(2.33), (2.38) を通じて k 点相関関数によって表される個別固有値分布も一致する．

バンクス–キャシャ関係式 (7.8) から，原点における平均準位間隔は $\pi/V\Sigma$ であり，これ（の $1/\pi$ 倍）を単位としてディラック固有値およびクォーク質量を測る (7.25) 左式はアンフォールディングに他ならない．上の対応から，ランダム行列で記述される QCD のディラック固有値 λ の範囲は，質量 $i\lambda$ をもつ仮想的なクォークからなる仮想的な擬 NG ボゾンが ε 領域に入る

$$|\lambda| = O(\frac{1}{\Sigma V}) \ll \frac{F^2}{\Sigma\sqrt{V}} \tag{7.26}$$

であり，またそれらの分布・相関関数に影響を与える物理的なクォークは質量が

$$m_f = O(\frac{1}{\Sigma V}) \ll \frac{F^2}{\Sigma\sqrt{V}} \tag{7.27}$$

を満たす種類に限られることになる．この条件を満たさない重クォークは (7.26) の範囲のディラック固有値に影響を及ぼさず，それらの準位統計上は無限に重いとして無視（クエンチ近似）してよい．一例として，核子が収まる体積 $V = (2\mathrm{fm})^4$ の格子上で，実際より若干軽い $m_{\mathrm{ud}} = 2\,\mathrm{MeV}$ の u, d クォークを用いるシミュレーションを想定しよう．低エネルギー定数の実際の値 $F \sim 130\,\mathrm{MeV}$, $\Sigma \sim (230\,\mathrm{MeV})^3$ を援用すると

$$\frac{1}{\Lambda_{\mathrm{QCD}}} : L : \frac{F}{\sqrt{\Sigma m_{\mathrm{ud}}}} = 0.7 : 2.0 : 5.2 \text{ [fm]}$$

となって条件 (7.17) は（一応）満たされている．このとき $\frac{1}{\Sigma V} \sim 7.7\,\mathrm{MeV}$, $\frac{F^2}{\Sigma\sqrt{V}} \sim 13\,\mathrm{MeV}$ となるので，2 フレーバーの有質量カイラル GUE により最小のディラック固有値の分布が記述できることが期待される．より重い u, d クォーク質量を用いたシミュレーションに対しては，クォーク行列式を無視した単純なカイラル GUE (2.27) でよい*10)．ランダム行列理論により解析的に得られる固有値相関関数を格子 QCD で測定されたこの範囲のディラック準位相関関数によくフィットできれば，㋐仮定されていたカイラル対称性の自発的破れが QCD において起きていることに対する，（π 中間子の軽さやカイラルラグランジアンの現象論的妥当性を超えた）最も直接的かつ定量的な検証に

*9) 有限の N_F に対しては常にカイラル対称性が自発的に破れた相にある chGUE とは異なり，QCD 側はフレーバー数を変化させると (6.10) のため一般には別の相に移り得るが，レプリカ極限 $n_1, \ldots, n_k \to 0$ では影響がない．N_F を非零に固定して $\lim_{n_a \to 0}$ をとることを部分クエンチ (partial quenching) と呼ぶ．

*10) この場合に π 中間子は十分重くなるので，ε 領域の条件は満たされずディラック固有値分布は全くランダム行列で記述されないのではとの質問をときに受けるが誤解である．(7.26) の範囲の固有値分布は m_π によらず（クエンチまたは有質量）ランダム行列で記述される．

なる．また，(7.25) 左式のスケーリング変数は Σ というカイラル有効理論に由来する未定の低エネルギー定数を含み，アンフォールドされたカイラル GUE の準位相関関数は（スケールされたクォーク質量 μ_f を固定すれば）自由パラメータを含まないので，㋑ディラック準位相関関数のフィットから QCD の低エネルギー定数を精密決定できることになる．QCD のディラック準位統計へのランダム行列の適用の主眼はこの 2 点にある．

QCD の高温相あるいは高密度相では，上で議論した 0 温度・0 密度状態とは異なり，カイラルフレーバー対称性が回復する（高温相）か，あるいは別種の破れ方をする（高密度相）と予想されている．ランダム行列と QCD の接点を㋐㋑に留めず，㋒格子シミュレーションが困難なこの高温・高密度領域での QCD 真空を模式化するという，双対超伝導模型やインスタントン気体・液体模型などが従来果たしてきた現象論的役割をランダム行列に求める研究もなされているが，本書の趣旨とは異なるために説明は割愛する．

7.6 実・擬実表現フェルミオン

ディラック場の質量項はカイラル対称性を課せば禁止される（7.1 節）のに対して，スカラー場の質量項を禁止する大域的対称性は存在しない．この差異は 1 ループの真空分極による両者の質量の量子補正に顕著に現れる．スカラー場の質量は微調整なしにはカットオフ $\Lambda = 10^{17\sim19}$ GeV のオーダーに補正されるべきにも関わらず，標準模型で予想され実測されたヒッグズ粒子の質量は電弱相互作用のスケールに入る 125 GeV である．この齟齬を自然に説明するためには，カイラル対称性のために質量の量子補正が $m\log(\Lambda/m)$ のオーダーに留まる（ワイスコップ現象）フェルミオンとヒッグズを関係付ければよい．この観点から，ヒッグズと超多重項を組み縮退した質量をもつフェルミオン（ヒグジーノ）を仮定する超対称性，およびヒッグズ粒子を未知のフェルミオン（テクニクォーク）が構成する中間子と同定するテクニカラー模型という 2 種類の仮説が提案されてきた．前者はグルーオンと超多重項を組む SU(3) の随伴表現に属するフェルミオン（グルイーノ）を含み，また後者で仮定される未知のゲージ相互作用のゲージ群およびテクニクォークが属する表現には幅広い選択の余地がある．現時点ではいずれを裏付ける実験的事実も発見されていないとはいえ，これらの魅力的な仮説は SU(3) の基本表現に属するクォークを含む QCD とは異なるゲージ群ないし表現をもつゲージ理論を研究する物理的動機を与える．

本節では任意のゲージ群の実表現または擬実表現 R（付録 B 参照）に属するフェルミオン場を考える．R の生成子 T_R^a は反線形同変関係 (B.8)，すなわち

$$T_R^a = -(T_R^a)^* \quad \text{または} \quad \boldsymbol{J}^{-1} T_R^a \boldsymbol{J} = -(T_R^a)^* \tag{7.28}$$

を満たす．一方，γ 行列は荷電共役行列 C による反線形同変関係

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^* \tag{7.29}$$

を満たす*11)．このためエルミートなディラック演算子 $i\not{D} = \gamma_\mu(i\partial_\mu I + A_\mu^a T_R^a)$ は $\mathrm{U}_A(1)$ 対称性 $\{i\not{D}, \gamma_5\} = 0$ に加えて対合的対称性

$$\begin{aligned} C^{-1} i\not{D} C = (i\not{D})^* \quad \text{または} \quad (\boldsymbol{J}C)^{-1} i\not{D} (\boldsymbol{J}C) = (i\not{D})^* \\ \Leftrightarrow [i\not{D}, KC] = 0 \quad \text{または} \quad [i\not{D}, K\boldsymbol{J}C] = 0 \end{aligned} \tag{7.30}$$

も有する．2.2 節におけるハミルトニアンとして $H = i\not{D}$，H と交換する反エルミート演算子として $\mathcal{T} = KC$ または $\mathcal{T} = K\boldsymbol{J}C$，$H$ と反交換するエルミート演算子として $\mathcal{P} = \gamma_5$ と同定すると，$\mathcal{T}^2 = \mp I, \mathcal{P}^2 = +I$ となる．従って実表現および擬実表現のディラック演算子は分類 2 における CII 型および BDI 型に分類され，対応するガウス型ランダム行列集団はカイラル GSE およびカイラル GOE である[73]．

5.6 節の表 5.1 に掲げたように，ハミルトニアン（=ディラック演算子）の対合的対称性 (7.30) はレプリカ対称性（=カイラルフレーバー対称性）とその自発的破れの型を決定する．これを具体的に見るため，N_F フレーバーの実表現クォークを含むベクトル型ゲージ理論の作用 (7.1) 中の基本表現・右巻き成分 q_R に注目する．$\bar{F} = F$ であるため，その荷電共役 $\tilde{q}_L := Cq_R^*$ は基本表現・左巻きとなる．このため 1 フレーバーの基本表現ディラックスピノルは 2 フレーバーの基本表現左巻きワイルスピノルと等価である．q_R の代わりに $\tilde{q}_L$ を用いると

$$q_R^\dagger \sigma_\mu^\dagger D_\mu q_R = \tilde{q}_L^\dagger \sigma_\mu D_\mu \tilde{q}_L, \quad q_R^\dagger q_L = \tilde{q}_L^T C q_L, \quad q_L^\dagger q_R = q_L^T C \tilde{q}_L$$

と書き換えられる．従って，$2N_F$ フレーバーの基本表現左巻きワイルスピノル

$$Q^F = \begin{cases} q_L^f & (F = f) \\ \tilde{q}_L^f & (F = f + N_F) \end{cases} \tag{7.31}$$

および質量行列 $M = \mathrm{diag}(m_1, \ldots, m_{N_F})$ を導入すれば (7.1) は

$$\textbf{実表現}: \sum_{F=1}^{2N_F} (Q^F)^\dagger \sigma_\mu D_\mu Q^F - \frac{1}{2}\sum_{F,G} (Q^F)^T C \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{pmatrix}^{FG} Q^G \tag{7.32}$$

と表される（ただしクォーク質量の位相は θ_{tot} に吸収させて $m_f \in \mathbb{R}$ とした）．

また，N_F フレーバーの擬実表現クォークを含む場合には，$\tilde{q}_L := \boldsymbol{J}Cq_R^*$ が基本表現・左巻きとなる．このとき

$$q_R^\dagger \sigma_\mu^\dagger D_\mu q_R = \tilde{q}_L^\dagger \sigma_\mu D_\mu \tilde{q}_L, \quad q_R^\dagger q_L = \tilde{q}_L^T \boldsymbol{J} C q_L, \quad q_L^\dagger q_R = -q_L^T \boldsymbol{J} C \tilde{q}_L$$

---

*11）γ_2, γ_4 が実，γ_1, γ_3 が純虚であるユークリッド空間でのワイル表示では $C = \gamma_2\gamma_4$．

と書き換えられるため，(7.1) は

$$\textbf{擬実表現}: \sum_{F=1}^{2N_F}(Q^F)^\dagger\sigma_\mu D_\mu Q^F - \frac{1}{2}\sum_{F,G}(Q^F)^T \boldsymbol{J}C\begin{pmatrix}0 & -M\\ M & 0\end{pmatrix}^{FG} Q^G \tag{7.33}$$

と表される．従っていずれの場合もクォークが無質量 $M=0$ ならば，理論の大域的対称性は複素表現クォークの場合の $\mathrm{SU}(N_F)_L\times\mathrm{SU}(N_F)_R$ から $G=\mathrm{SU}(2N_F)$ に拡大される（パウリ–ギュルセイ対称性）．また，ヴァファ–ウィッテンの定理によって自発的に破れないことが保証されているベクトル対称性は，(7.32) および (7.33) の縮退した質量項（$M=mI$）のフレーバー構造

$$Q^T\hat{M}Q, \quad \hat{M}:=\begin{pmatrix}0 & \pm I\\ I & 0\end{pmatrix} \tag{7.34}$$

を保つ変換である $H=\mathrm{SO}(2N_F)$（実表現）および $\mathrm{Sp}(2N_F)$（擬実表現）となる．カイラル凝縮が生じれば大域的対称性は $G\to H$ と自発的に破れるため，擬 NG ボゾンは対称空間

$$G/H=\mathrm{SU}(2N_F)/\mathrm{SO}(2N_F)\ (\text{実表現}),\quad \mathrm{SU}(2N_F)/\mathrm{Sp}(2N_F)\ (\text{擬実表現})$$

に値をとることとなり，5.6 節表 5.1 における色行列変数が CII 型，BDI 型に属する場合の香り行列変数の型（AI 型，AII 型）と整合する．対称空間 G/H の元である同値類の各々は，$V\in G=\mathrm{SU}(2N_F)$ に対して類関数である写像

$$V\mapsto U(V)=V^T\hat{M}V=\pm U(V)^T \tag{7.35}$$

によりリー群 G 自体に埋め込まれる．この $U(V)^{FG}$ は物理的にはダイクォーク凝縮と通常のクォーク–反クォーク凝縮を統合した $(Q^F)^TC\hat{M}Q^G$ の角度成分と同定されるため，G の下で対称ないし反対称テンソルとして変換する：

$$U(V)\mapsto \Omega U(V)\Omega^T, \quad \Omega\in\mathrm{SU}(2N_F). \tag{7.36}$$

擬 NG ボゾンの有効作用は定理 7.2（複素表現フェルミオンの場合）で制限された項に $U\to U(V)$ および $M\to M\otimes\hat{M}$ の変更を行ったものとなり，最低次では (7.16) に対応した

$$\mathcal{L}_{\mathrm{W}}=\frac{F^2}{2}\operatorname{tr}\partial_\mu U^\dagger\partial_\mu U-\Sigma\operatorname{Re}\operatorname{tr}M\otimes\hat{M}U, \quad U=V^T\hat{M}V\in\mathrm{SU}(2N_F) \tag{7.37}$$

の 2 項からなる[74]*12)．この有効作用について複素表現フェルミオンの場合

*12）カラー–フレーバー変換（5.6 節，表 5.1）を用いて強結合極限での SO(N) および Sp($2N$) ゲージ理論からこの有効ラグランジアンを直接導出することもできる[75]．

の 7.3〜5 節の論理を繰り返せば，ダイソン指数 $\beta = 2$ をもつ有質量カイラル GUE (7.23), (7.24) における行列変数 $Z \in \mathbb{C}^{N\times(N+\nu)}$ を $\mathbb{H}^{N\times(N+\nu)}$ ないし $\mathbb{R}^{N\times(N+\nu)}$ に置き換えた有質量カイラル GSE ないし GOE ($\beta = 4, 1$) が G/H 上の 0 次元非線形 σ 模型と等価になり，対応するゲージ理論の ε 領域におけるディラック準位相関を記述することが示される[76].

7.7 固有値相関関数：有質量カイラルランダム行列

有質量カイラルランダム行列集団の固有値相関関数を導出するには，前節の論理通りに 0 次元非線形 σ 模型のレプリカ（部分クエンチ）極限（第 5 章）を直接用いることもできるが[77]，不変ランダム行列の利点を生かして固有値分布関数（第 2 章）を用いるのが便利である[78],[79].

3 種類のダイソン指数 $\beta = 2, 1, 4$ をもつ確率測度 (7.24) に従う行列変数 Z から導かれる正定値行列（ウィシャート行列）$W = Z^\dagger Z$ の規格化されていない固有値分布は，ラゲール型集団 (2.27) を自然に拡張した

$$P_{N,n}(\{\lambda\};\{m^2\}) = \prod_{i=1}^{N}\Bigl(w(\lambda_i)\prod_{f=1}^{n}(\lambda_i + m_f^2)\Bigr)\prod_{j>k}^{N}|\lambda_j - \lambda_k|^\beta, \quad (7.38)$$
$$w(\lambda) = \lambda^{\beta(\nu+1)/2-1}\,\mathrm{e}^{-\beta\lambda} \quad (\lambda \geq 0)$$

である（フレーバー数 N_F を n と表記した）．上式の重み関数の形から，ϵ 領域でのディラック固有値相関に関しては n_0 種類の無質量 ($m_f = 0$) クォークの寄与がトポロジカル荷電のシフト $\nu \mapsto \nu + 2n_0/\beta$ に吸収できること（フレーバー/トポロジー双対性[82]）が明白となる．W の固有値の k 点相関関数は

$$R_{k,N}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k;\{m^2\}) = \frac{\Xi_k^{(N,n)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k;\{m^2\})}{\Xi_0^{(N,n)}(\{m^2\})}, \quad (7.39)$$
$$\Xi_k^{(N,n)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k;\{m^2\}) = \frac{1}{(N-k)!}\int_0^\infty \prod_{j=k+1}^{N} d\lambda_j\, P_{N,n}(\{\lambda\};\{m^2\})$$

であり，対応するカイラル型行列 $H = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^\dagger & 0 \end{pmatrix}$ の固有値の k 点相関関数は変数変換 $\lambda_j \mapsto \lambda_j^2$ のヤコビアンを掛けた

$$R_{k,N}^{(\mathrm{chiral})}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k;\{m\}) = \prod_{j=1}^{k}|2\lambda_j| \cdot R_k(\lambda_1^2,\ldots,\lambda_k^2;\{m^2\}) \quad (7.40)$$

となる．以下では $\beta = 2, 1, 4$ の各々について $R_{k,N}^{(\mathrm{chiral})}$ の微視的極限

$$R_k^{(\mathrm{chiral})}(\{\zeta_i\};\{\mu_f\}) := \lim_{N\to\infty}\frac{1}{(2\sqrt{N})^k}R_{k,N}^{(\mathrm{chiral})}\Bigl(\Bigl\{\frac{\zeta_i}{2\sqrt{N}}\Bigr\};\Bigl\{\frac{\mu_f}{2\sqrt{N}}\Bigr\}\Bigr) \quad (7.41)$$

を求める．

7.7.1 $\beta = 2$

$\Xi_k^{(N,n)}$ 中の固定された固有値変数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ は 2 重に縮退した 2 乗質量 $-\lambda_j < 0$ をもつ $2k$ 種類のフレーバーと見なせるため，自明に

$$\Xi_k^{(N,n)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k; m_1^2, \ldots, m_n^2) = \prod_{i>j}^{k}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \cdot \prod_{i=1}^{k}\Big(w(\lambda_i)$$
$$\prod_{f=1}^{n}(\lambda_i + m_f^2)\Big)\Xi_0^{(N-k,n+2k)}(m_1^2, \ldots, m_n^2, -\lambda_1, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_k, -\lambda_k) \tag{7.42}$$

が成り立つ．$\Xi_0^{(N,n)}$ の微視的極限である $\mathcal{Z}_n$ (5.18) には $N-k$ と N の差が現れないので，(7.39)∼(7.42) から直ちに

$$R_k^{(\mathrm{chiral})}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k; \mu_1, \ldots, \mu_n) = C_k \prod_{i=1}^{k}\Big(\zeta_i \prod_{f=1}^{n}(\zeta_i^2 + \mu_f^2)\Big)\prod_{j>l}^{k}(\zeta_j^2 - \zeta_l^2)^2$$
$$\times \frac{\mathcal{Z}_{n+2k}(\mu_1, \ldots, \mu_n, i\zeta_1, i\zeta_1, \ldots, i\zeta_k, i\zeta_k)}{\mathcal{Z}_n(\mu_1, \ldots, \mu_n)} \tag{7.43}$$

が従う[83]．C_k は $\{\mu\}$ によらない定数で，規格化条件 $\rho_k^{(\mathrm{chiral})} \to \pi^{-k}$ ($\zeta_i \to \infty$) により決定される．$\mathcal{Z}_n$ の具体形 (5.26) に対して各対の合流極限 $\mu_{n+2i-1}, \mu_{n+2i} \to i\zeta_i$ ($i = 1, \ldots, k$) をとることにより，上式は

$$R_k^{(\mathrm{chiral})}(\{\zeta\}; \{\mu\}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\zeta_i/2}{\prod_{f=1}^{n}(\zeta_i^2 + \mu_f^2)} \cdot \left|\frac{\det \mathcal{B}_{n,k}(\{\zeta\}; \{\mu\})}{\det \mathcal{A}_n(\{\mu\})}\right|, \tag{7.44}$$

$$\mathcal{A}_n = \left[\mu_f^{g-1} I_{\nu+g-1}(\mu_f)\right]_{f,g=1}^{n},$$

$$\mathcal{B}_{n,k} = \left[\begin{array}{c} \left[\mu_f^{g-1} I_{\nu+g-1}(\mu_f)\right]_{f=1}^{n} \\ \left[\begin{array}{c} (-\zeta_i)^{g-1} J_{\nu+g-1}(\zeta_i) \\ (-\zeta_i)^{g-2} J_{\nu+g-2}(\zeta_i) \end{array}\right]_{i=1}^{k} \end{array}\right]_{g=1}^{n+2k}$$

と明示される．

なおこの導出では直交多項式法，およびそれから従うユニタリー不変集団の固有値が行列式点プロセスであることを用いていない．重み $w(\lambda)\prod_{f=1}^{n}(\lambda + m_f^2)$ により直交する多項式およびカーネルを直接構成することにより，行列式点プロセス

$$R_k^{(\mathrm{chiral})}(\{\zeta\}; \{\mu\}) = \det\left[K(\zeta_i, \zeta_j; \{\mu\})\right]_{i,j=1}^{k}, \tag{7.45}$$

$$K(\zeta, \zeta'; \{\mu\}) = \frac{\sqrt{\zeta\zeta'}}{(\zeta^2 - \zeta'^2)\prod_{f=1}^{n}\sqrt{(\zeta^2 + \mu_f^2)(\zeta'^2 + \mu_f^2)}} \frac{\det \mathcal{C}_n(\zeta, \zeta'; \{\mu\})}{\det \mathcal{A}_n(\{\mu\})},$$

$$
\mathcal{C}_n = \begin{bmatrix} \left[\mu_f^{g-1} I_{\nu+g-1}(\mu_f)\right]_{f=1}^{n} \\ (-\zeta)^{g-1} J_{\nu+g-1}(\zeta) \\ (-\zeta')^{g-1} J_{\nu+g-1}(\zeta') \end{bmatrix}_{g=1}^{n+2}
$$

の形に表示することもできる[78], [84]．このカーネルによる表示は，フレドホルム行列式 $\mathrm{Det}(\mathbb{I} - \hat{K}|_{[0,\zeta]})$ などの数値評価（4.8 節）により個別固有値分布（3.2 節）を得るのに適している[85]．

7.7.2　$\beta = 1$

$\Xi_k^{(N,n)}$ 中の固定された固有値変数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ は 2 乗質量 $-\lambda_j < 0$ をもつ k 種類のフレーバーと見なせる．(7.42) と同様に $\Xi_k^{(N,n)}$ と $\Xi_0^{(N-k,n+k)}$ を関係づけ，前節の類似および 3.4 節のラゲール型歪直交多項式の性質を用いると，準位相関関数の微視的極限は

$$
R_k^{(\mathrm{chiral})}(\{\zeta\};\{\mu\}) = 2^k \prod_{i=1}^{k} \zeta_i \frac{\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} D_{--} & -S_{+-}^T & D_{-+} \\ S_{+-} & -I_{++} & S_{++} \\ -D_{-+}^T & -S_{++}^T & D_{++} \end{bmatrix}}{\mathrm{Pf}\left[D_{--}\right]} \quad (n:\text{偶})
$$

$$
= 2^k \prod_{i=1}^{k} \zeta_i \frac{\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} 0 & S_- & -I_+ & S_+ \\ -S_-^T & D_{--} & -S_{+-}^T & D_{-+} \\ I_+^T & S_{+-} & -I_{++} & S_{++} \\ -S_+^T & -D_{-+}^T & -S_{++}^T & D_{++} \end{bmatrix}}{\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} 0 & S_- \\ -S_-^T & D_{--} \end{bmatrix}} \quad (n:\text{奇}) \qquad (7.46)
$$

となる．ここで行列 $S_{\epsilon\epsilon'}, D_{\epsilon\epsilon'}, I_{\epsilon\epsilon'}$ および横ベクトル S_ϵ, I_ϵ $(\epsilon, \epsilon' = +, -)$ の要素 $(S_{++})_{ij} = S_{++}(\zeta_i, \zeta_j)$, $(S_{-+})_{fj} = S_{-+}(\mu_f, \zeta_j)$, $(S_{--})_{fg} = S_{--}(\mu_f, \mu_g)$, $(S_+)_i = S_+(\zeta_i)$, $(S_-)_f = S_-(\mu_f)$ などは

$$
\begin{aligned}
S_{++}(\zeta,\zeta') &= \frac{1}{4}\int_0^1 dt\, t^2 \int_0^{\zeta} ds \left(s\, J_{\nu-1}(ts) \frac{J_\nu(t\zeta')}{\zeta'} - J_\nu(ts) J_{\nu-1}(t\zeta') \right) \\
&\quad + \frac{J_\nu(\zeta')}{4\zeta'}, \\
D_{++}(\zeta,\zeta') &= \frac{1}{16}\int_0^1 dt\, t^2 \big(J_{\nu-1}(t\zeta) \frac{J_\nu(t\zeta')}{\zeta'} - \frac{J_\nu(t\zeta)}{\zeta} J_{\nu-1}(t\zeta') \big), \\
I_{++}(\zeta,\zeta') &= -\int_0^1 dt\, t^2 \int_0^{\zeta} du \int_0^{\zeta'} dv \big(u\, J_{\nu-1}(tu) J_\nu(tv) - J_\nu(tu) v\, J_{\nu-1}(tv) \big) \\
&\quad - \int_{\zeta}^{\zeta'} J_\nu(u) du - \mathrm{sgn}(\zeta - \zeta');
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{-+}(\mu,\zeta) &= S_{+}(\zeta) = \frac{J_\nu(\zeta)}{4\zeta},\\
S_{+-}(\zeta,\mu) &= \frac{1}{4}\int_0^1 dt\, t^2 \int_0^{\zeta} ds\left(s\, J_{\nu-1}(ts)\frac{I_\nu(t\mu)}{\mu} - J_\nu(ts)I_{\nu-1}(t\mu)\right)\\
&\quad + \frac{I_\nu(\mu)}{4\mu},\\
D_{-+}(\mu,\zeta) &= \frac{1}{16}\int_0^1 dt\, t^2\left(I_{\nu-1}(t\mu)\frac{J_\nu(t\zeta)}{\zeta} - \frac{I_\nu(t\mu)}{\mu}J_{\nu-1}(t\zeta)\right),\\
I_{-+}(\mu,\zeta) &= I_{+}(\zeta) = -\int_0^{\zeta} J_\nu(u)du + 1;\\
S_{--}(\mu,\mu') &= S_{-}(\mu') = \frac{I_\nu(\mu')}{4\mu'},\\
D_{--}(\mu,\mu') &= \frac{1}{16}\int_0^1 dt\, t^2\left(I_{\nu-1}(t\mu)\frac{I_\nu(t\mu')}{\mu'} - \frac{I_\nu(t\mu)}{\mu}I_{\nu-1}(t\mu')\right),\\
I_{--}(\mu,\mu') &= \mathrm{sgn}(\mu-\mu')
\end{aligned}
$$

で与えられる[79].

7.7.3 $\beta = 4$

この場合には，質量が対で縮退した偶数種類 $n = 2\alpha$ のフレーバーの場合のみ分配関数の表式が知られている．$\Xi_k^{(N,n)}$ 中の固定された固有値変数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ は 4 重に縮退した 2 乗質量 $-\lambda_j < 0$ をもつ $4k$ 種類のフレーバーと見なせる．(7.42) と同様に $\Xi_k^{(N,2\alpha)}$ と $\Xi_0^{(N-k,2(\alpha+2k))}$ を関係づけ，3.4 節のラゲール型歪直交多項式の性質を用いると，準位相関関数の微視的極限は

$$
\begin{aligned}
R_k^{(\mathrm{chiral})}(\{\zeta\};\{\mu\}) &= 2^k \prod_{i=1}^{k}\zeta_i \frac{\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} I_{--} & I_{-+} & S_{-+}\\ -I_{-+}^T & I_{++} & S_{++}\\ -S_{-+}^T & -S_{++}^T & D_{++}\end{bmatrix}}{\mathrm{Pf}[I_{--}]} \quad (\alpha：偶)\\
&= 2^k \prod_{i=1}^{k}\zeta_i \frac{\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} I_{--} & Q_{-} & I_{-+} & S_{-+}\\ -Q_{-}^T & 0 & -Q_{+}^T & -P_{+}^T\\ -I_{-+}^T & Q_{+} & I_{++} & S_{++}\\ -S_{-+}^T & P_{+} & -S_{++}^T & D_{++}\end{bmatrix}}{\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} I_{--} & Q_{-}\\ -Q_{-}^T & 0\end{bmatrix}} \quad (\alpha：奇) \qquad (7.47)
\end{aligned}
$$

となる．行列 $S_{\epsilon\epsilon'}$, $D_{\epsilon\epsilon'}$, $I_{\epsilon\epsilon'}$ および横ベクトル Q_ϵ, P_ϵ $(\epsilon, \epsilon' = +, -)$ の要素 $(I_{++})_{ij} = I_{++}(\zeta_i, \zeta_j)$, $(I_{-+})_{fj} = I_{-+}(\mu_f, \zeta_j)$, $(I_{--})_{fg} = I_{--}(\mu_f, \mu_g)$, $(Q_+)_i = Q_+(\zeta_i)$, $(Q_-)_f = Q_-(\mu_f)$ などは

$$
I_{--}(\mu,\mu') = \mu\mu'\int_0^1 dt\, t\int_0^1 du\big(I_{2\nu}(2t\mu)I_{2\nu}(2tu\mu') - I_{2\nu}(2tu\mu)I_{2\nu}(2t\mu')\big),
$$

$$I_{-+}(\mu,\zeta)=\mu\zeta\int_0^1 dt\,t\int_0^1 du\big(I_{2\nu}(2t\mu)J_{2\nu}(2tu\zeta)-I_{2\nu}(2tu\mu)J_{2\nu}(2t\zeta)\big),$$

$$S_{-+}(\mu,\zeta)=\mu_i\int_0^1 dt\,t^2\int_0^1 du\big(I_{2\nu}(2t\mu)u\,J_{2\nu+1}(2tu\zeta) - I_{2\nu}(2tu\mu)J_{2\nu+1}(2t\zeta)\big),$$

$$I_{++}(\zeta,\zeta')=\zeta\zeta'\int_0^1 dt\,t\int_0^1 du\big(J_{2\nu}(2t\zeta)J_{2\nu}(2tu\zeta')-J_{2\nu}(2tu\zeta)J_{2\nu}(2t\zeta')\big),$$

$$S_{++}(\zeta,\zeta')=\zeta\int_0^1 dt\,t^2\int_0^1 du\big(J_{2\nu}(2t\zeta)u\,J_{2\nu+1}(2tu\zeta') - J_{2\nu}(2tu\zeta)J_{2\nu+1}(2t\zeta')\big),$$

$$D_{++}(\zeta,\zeta')=\int_0^1 dt\,t^3\int_0^1 du\,u\big(J_{2\nu+1}(2t\zeta)J_{2\nu+1}(2tu\zeta') - J_{2\nu+1}(2tu\zeta)J_{2\nu+1}(2t\zeta')\big),$$

$$Q_{-}(\mu)=\mu\int_0^1 dt\,I_{2\nu}(2t\mu),$$

$$Q_{+}(\zeta)=\zeta\int_0^1 dt\,J_{2\nu}(2t\zeta),$$

$$P_{+}(\zeta)=\int_0^1 dt\,t\,J_{2\nu+1}(2t\zeta),$$

で与えられる[79].

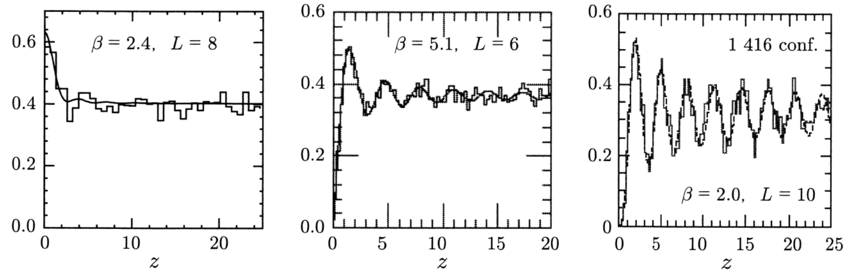


図 7.5　微視的固有値密度．クエンチ近似における [左] SU(2) 基本表現[87]，[中央] SU(3) 基本表現[88]，[右] SU(3) 随伴表現[89] のディラック演算子の固有値密度を対応するカイラルランダム行列の解に 1 パラメータフィットした結果．

7.8　有限密度ゲージ理論と対称性クラスの内挿

7.6 節において，SO(N) および Sp($2N$) ゲージ理論の基本表現（実および擬実表現）クォークに作用するディラック演算子の準位統計が，ε 領域ではカイ

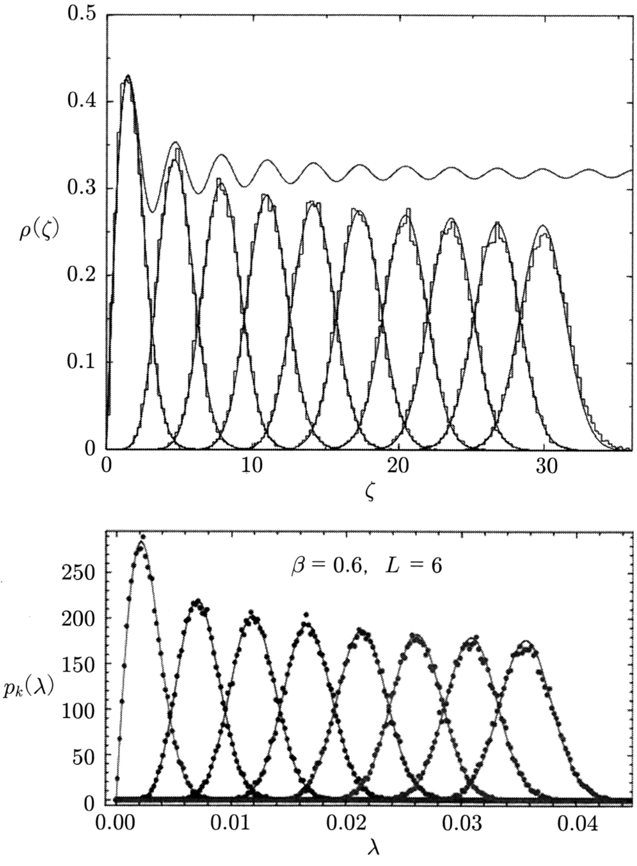


図 7.6　1 ~ 10 番目の固有値分布．クエンチ近似における [上] SU(3) 基本表現ディラック演算子[81] および [下] コンパクト U(1) ディラック演算子[85] の固有値密度を対応するカイラルランダム行列の解に 1 パラメータフィットした結果．

ラル GSE（CII 型）およびカイラル GOE（BDI 型）で記述されることを見た．本節ではこれらのゲージ理論が弱い $\mathrm{U}(1)_V$ 背景場 a_ν の中に置かれた場合を考える*13)．U(1) 群の自明でない表現は複素表現であるため，この場合のディラック演算子 $\gamma^\nu(i\partial_\nu + A_\nu + a_\nu)$（$A_\nu = A_\nu^a T^a$ は SO(N) および Sp($2N$) ゲージ場）はその対合的対称性 (7.30) が a_ν により僅かに破られることになる．特に背景場が一様，かつ時間方向に偏極している場合には $(a_\nu = \mu\delta_{\nu 0})$*14)

$$\bar{q}\gamma^\nu a_\nu q = \mu q^\dagger q = \mu(q_L^\dagger q_L - \tilde{q}_L^\dagger \tilde{q}_L) = \mu\, Q^\dagger \hat{B} Q,\ \hat{B} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (7.48)$$

となる．背景場の振幅 μ は，クォーク数 $n_q = \int_{L^3} d^3x\, q^\dagger q$ ないしバリオン数

*13)　スペクトル遷移を惹き起こす摂動は，パウリ−ギュルセイ対称性を破るものであれば U(1) 背景場である必要はなく，ダイナミカルな U(1) ゲージ場ないし複素表現をもつ任意の弱い背景場・ダイナミカル場であってもよい．

*14)　本節では記号 μ をクォーク質量パラメータとしては用いない．

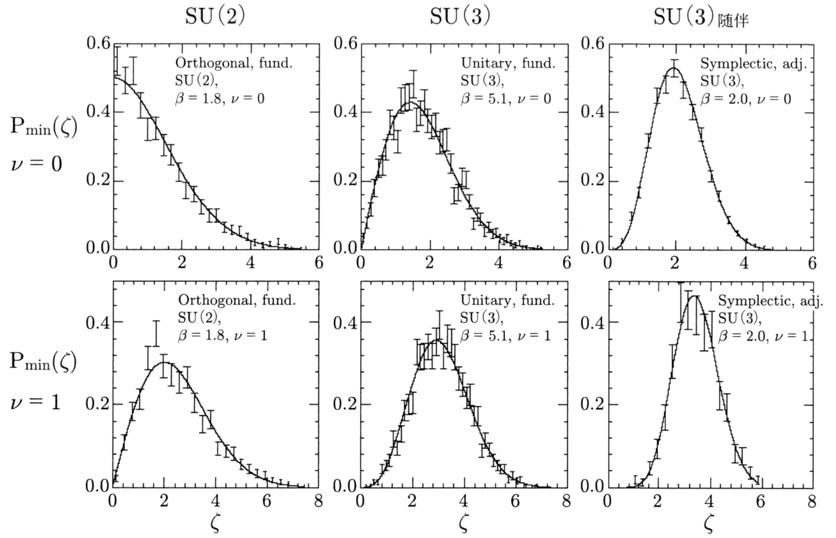


図 7.7 最小ディラック固有値分布．上・下段はそれぞれトポロジカルチャージ $\nu=0$ と 1 のゲージ場配位からの統計．クエンチ近似における [左] SU(2) 基本表現，[中央] SU(3) 基本表現，[右] SU(3) 随伴表現のディラック演算子の最小固有値分布を対応するカイラルランダム行列の解に 1 パラメータフィットした結果[90]．

$n_B = n_q/N$ および $n_q/2N$ に結合してユークリッド空間 $L^3 \times 1/T$ 上の経路積分に因子 $\mathrm{e}^{-S} \sim \mathrm{e}^{i(\mu/T)n_q}$ を付加するため，バリオン数虚数化学ポテンシャルに他ならない．従って μ の導入は有限のバリオン密度をもつゲージ理論の大正準集合を考えることに相当する．(7.48) から，ユークリッド的作用の運動項は $2N_F$ フレーバーの左巻きワイルスピノル Q を用いて

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = Q^\dagger \sigma_\nu D_\nu Q - i\mu Q^\dagger \hat{B} Q =: Q^\dagger \sigma_\nu \nabla_\nu Q \tag{7.49}$$

と表される．ここで Q のカラー自由度（ゲージ群 $\mathrm{SO}(N)$, $\mathrm{Sp}(2N)$ の基本表現）に加えて，フレーバー自由度（$\mathrm{SU}(2N_F)$ の基本表現）にも作用する拡張された共変微分 ∇_ν を

$$\nabla_\nu = \partial_\nu - iA_\nu - iB_\nu, \quad B_\nu = \mu\delta_{\nu 0}\hat{B} \tag{7.50}$$

と定義した．$\mu \neq 0$ のときには Q^F 中のクォーク成分 q_L^f と反クォーク成分 $\tilde{q}_L^f$ の縮退は破られ，$\mathcal{L}_{\rm kin}$ はクォークと反クォークを混合する拡大されたフレーバー変換 $Q(x) \mapsto \Omega Q(x)$, $\Omega \in \mathrm{SU}(2N_F)$ の下で不変ではない．しかし，B_ν を定数の背景場からダイナミカルなゲージ場に（仮想的に）格上げしてゲージ変換性

$$\begin{aligned} Q(x) &\mapsto \Omega(x)Q(x), \\ B_\nu(x) &\mapsto \Omega(x)B_\nu(x)\Omega(x)^\dagger + i\Omega(x)\partial_\nu\Omega(x)^\dagger \end{aligned} \tag{7.51}$$

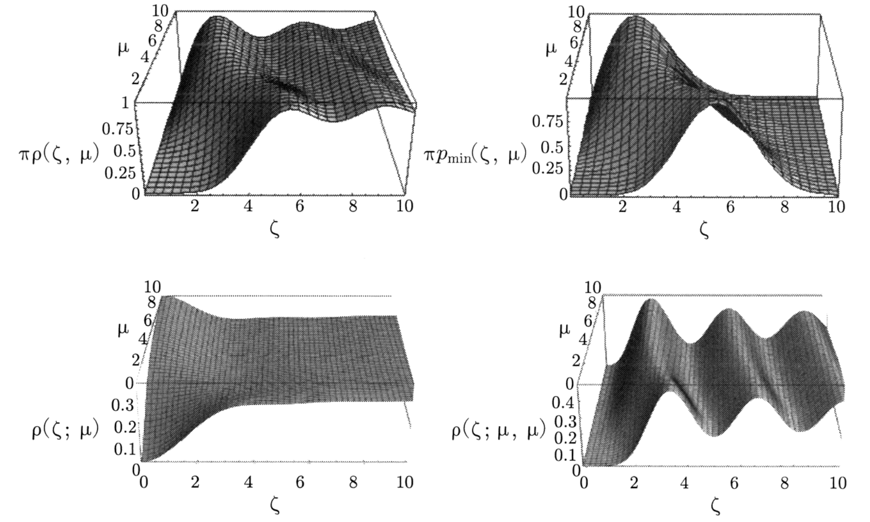


図 7.8 微視的固有値分布のクォーク質量依存性．[上段] $N_F = 3$ カイラルユニタリー集団の固有値密度（左）[78] と最小固有値分布（右）[81]．[下段] $N_F = 1$ カイラル直交集団（左）と $N_F = 2$ カイラルシンプレクティック集団（右）の固有値密度[86]．

を付与すれば $\mathcal{L}_{\rm kin}$ を局所的 $\mathrm{SU}(2N_F)$ 変換の下ですら不変にできる．基礎理論のラグランジアンがフレーバー $\mathrm{SU}(2N_F)$ 群の下でゲージ不変であるため，低エネルギー有効理論のラグランジアンも同じゲージ不変性をもたなければならない．NG 場 $U(x)$ はフレーバー $\mathrm{SU}(2N_F)$ の 2 階（反）対称テンソル表現 (7.36) に属し，またカラー自由度はもたない（ゲージ場 A_ν の生成子は自明表現の $T^a = 0$）ことから，$U(x)$ に作用する拡張された共変微分 ∇_ν は

$$\nabla_\nu U = \partial_\nu - i(B_\nu U + U B_\nu^T) = \partial_\nu - i\mu\delta_{\nu 0}(\hat{B}U + U\hat{B}) \tag{7.52}$$

である．従って，最低次の有効ラグランジアンは (7.37) を共変化した

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm W} &= \frac{F^2}{2}\,\mathrm{tr}\,\nabla_\nu U^\dagger \nabla_\nu U - \Sigma m\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,\hat{M}U \qquad (7.53)\\ &= \frac{F^2}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\partial_\nu U^\dagger \partial_\nu U + 4i\mu\partial_0 U U^\dagger \hat{B} + 2\mu^2(\hat{B}U\hat{B}U^\dagger + I)\right\} - \Sigma m\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,\hat{M}U\end{aligned}$$

として，大域的対称性のみから 2 つの未定定数 F, Σ を除いて一意的に決定される[92],[93]．ただし上では簡単のため縮退したクォーク質量 ($M = mI_{N_F}$) かつ自明なトポロジー ($\nu = 0$) の場合に限定した．この論理はクォーク質量行列 M をスカラー場 $M(x)$ に格上げしてフレーバー変換性を付与することにより有効作用を制限した 7.3 節の手法のゲージ化版である．7.4, 7.5 節の議論を繰り返せば，ε 領域において最低次の有効理論は (7.53) を零モード近似した非線形 σ 模型

$$Z_0 = \int_{\mathrm{U}(2N_F)} dU\, \exp\left(V\Sigma m\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,\hat{M}U - VF^2\mu^2\,\mathrm{tr}\,\hat{B}U\hat{B}U^\dagger\right) \tag{7.54}$$

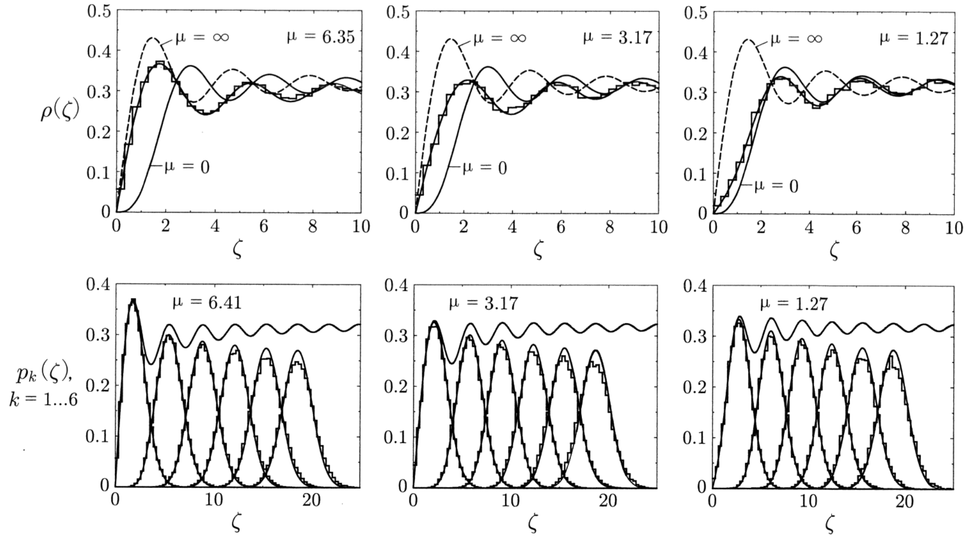


図 7.9　格子 QCD シミュレーションによる微視的固有値分布とカイラルランダム行列のフィット[80]. SU(3), $N_F = 1$ と有質量カイラル GUE の [上] 微視的固有値密度と [下] 1 ～ 6 番目の固有値分布. アンフォールドされたクォーク質量：$\mu = 6.35$ または 6.41 [左], 3.17 [中], 1.27 [右].

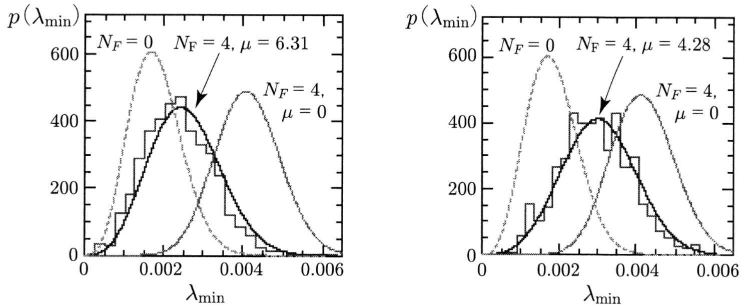


図 7.10　格子 QCD シミュレーションによる微視的固有値分布とカイラルランダム行列のフィット．SU(2), $N_F = 4$ と有質量カイラル GSE の最小固有値分布[91]．アンフォールドされたクォーク質量：$\mu = 6.31$ [左]，4.28 [右].

に帰着する*15)．微視的極限で (7.54) を与えるランダム行列集団が存在すれば，その準位相関関数を U(1) 背景場中のゲージ理論のディラック準位分布の測定値にフィットすることで無次元のパラメータ $V\Sigma m$ および $VF^2\mu^2$ を決定し，それから凝縮 Σ のみならず NG 粒子の崩壊定数 F をも抽出できるはずである．そのような集団は，対称性クラス間を内挿するダイソンのブラウン運動模型[95] のカイラル版

$$H = H_0 + \alpha H_1 \tag{7.55}$$

として知られている[7],[96]．ここで H_0, H_1 は共通の分散（非対角要素について

*15）任意の対合的対称性を露わに破る摂動が加わった場合の最低次の 0 次元有効作用は，対称性の観点のみから，ある $\hat{M}$ と $\hat{B}$ を含む (7.54) の形に限られることが証明できる[94].

σ^2）をもつカイラル GOE（またはカイラル GSE）とカイラル GUE に属する $N\times N$ 行列であり，実数パラメータ α は両者の混合比を表す．H のスペクトル中のある位置 x における平均準位間隔を $\Delta=1/\bar{\rho}(x)$ とすると，熱力学極限 $N\to\infty$ において $\alpha=O((\Delta/\sigma)^{<1})$ の場合は H_0，$O((\Delta/\sigma)^{>1})$ の場合は H_1 が他方を凌駕してそれぞれの対称性クラスに属する局所的準位統計を示す．一方，両者の境界である $\alpha=O(\Delta/\sigma)$ の場合には，熱力学極限で有限に固定されるパラメータ $\rho:=\alpha\sigma/\Delta$ の値の増加に応じて局所的準位統計は，原点近傍において BDI 型（または CII 型）から AIII 型，バルクにおいて AI 型（または AII 型）から A 型への連続的遷移を示す．その固有値相関関数はパフィアン点プロセス (3.30) に従い，原点近傍での 4 元数カーネル要素のスケーリング極限は

BDI-AIII 遷移: (7.56)

$$S(x,x')=K^{(\nu)}_{\rm chiral}(x,x')+\frac{\sqrt{xx'}}{2}J_\nu(x')\int_1^\infty dv\ {\rm e}^{\pi^2\rho^2(1-v^2)}\,J_\nu(vx),$$

$$D(x,x')=\frac{\sqrt{xx'}}{2}\int_0^1 dv\,v^2\ {\rm e}^{2\pi^2\rho^2v^2}\left\{xJ_{\nu-1}(vx)J_\nu(vx')-J_\nu(vx)x'J_{\nu-1}(vx')\right\},$$

$$\tilde{I}(x,x')=\frac{\sqrt{xx'}}{2}\int_1^\infty dv\,v\int_1^\infty du\ {\rm e}^{-\pi^2\rho^2v^2(1+u^2)}\times\left\{J_\nu(vux)J_\nu(vx')-J_\nu(vx)J_\nu(vux')\right\},$$

CII-AIII 遷移: (7.57)

$$S(x,x')=K^{(\nu)}_{\rm chiral}(x,x')-\frac{\sqrt{xx'}}{2}J_\nu(x)\int_0^1 dv\ {\rm e}^{\pi^2\rho^2(v^2-1)}\,J_\nu(vx'),$$

$$D(x,x')=\frac{\sqrt{xx'}}{2}\int_0^1 dv\,v\int_0^1 du\ {\rm e}^{\pi^2\rho^2v^2(1+u^2)}\times\left\{J_\nu(vux)J_\nu(vx')-J_\nu(vx)J_\nu(vux')\right\},$$

$$\tilde{I}(x,x')=-\frac{\sqrt{xx'}}{2}\int_1^\infty dv\,v^2\ {\rm e}^{-2\pi^2\rho^2v^2}\left\{xJ_{\nu-1}(vx)J_\nu(vx')-J_\nu(vx)x'J_{\nu-1}(vx')\right\}$$

であることが示されている[96]．また，5.1 節に倣って H の特性多項式 $\left\langle\det(z-iH)^{N_F}\right\rangle$ にハバード–ストラトノビッチ変換を施してからスケーリング極限をとると，(7.54) において

$$VF^2\mu^2=\pi^2\rho^2/2 \tag{7.58}$$

と置き換えた形（質量項は (7.25) と同じ）が得られる．ゲージ理論への適用の一例を挙げると，CII-AIII 遷移における 4 元数カーネル (7.57) のフレドホルム行列式およびトレース (3.19) を 4.8 節の数値計算法により評価して個別準位分布 $p_k(x)$ の遷移パラメータ ρ 依存性を求め（図 7.11），これを用いて Sp(2) = SU(2) ゲージ理論における虚数化学ポテンシャル μ を導入した

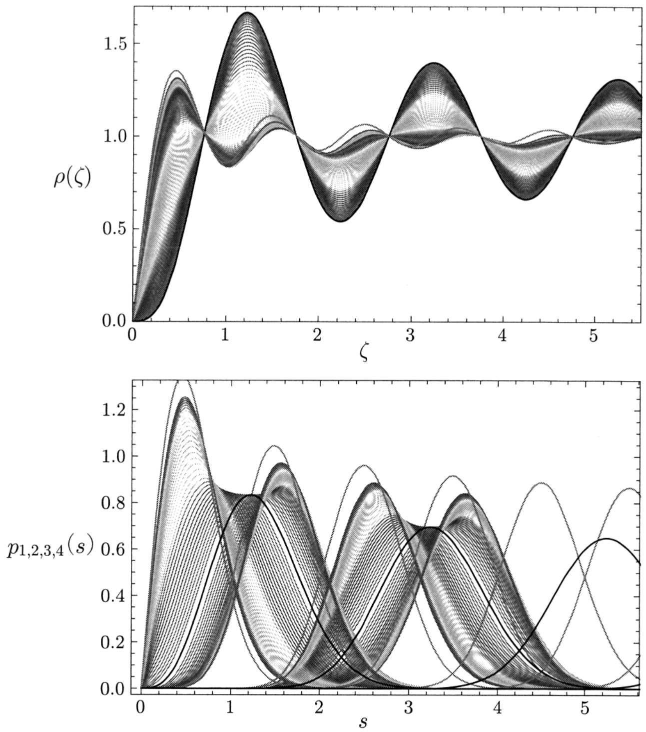


図 7.11　CII-AIII 遷移 ($\nu = 0$) の [上] 微視的固有値密度 $\rho(\zeta)$ と [下] $k = 1, \ldots, 4$ 番目の固有値分布 $p_k(s)$．遷移パラメータ ρ の増加に伴い，カイラル GSE とカイラル GUE の分布間を内挿する[97]．

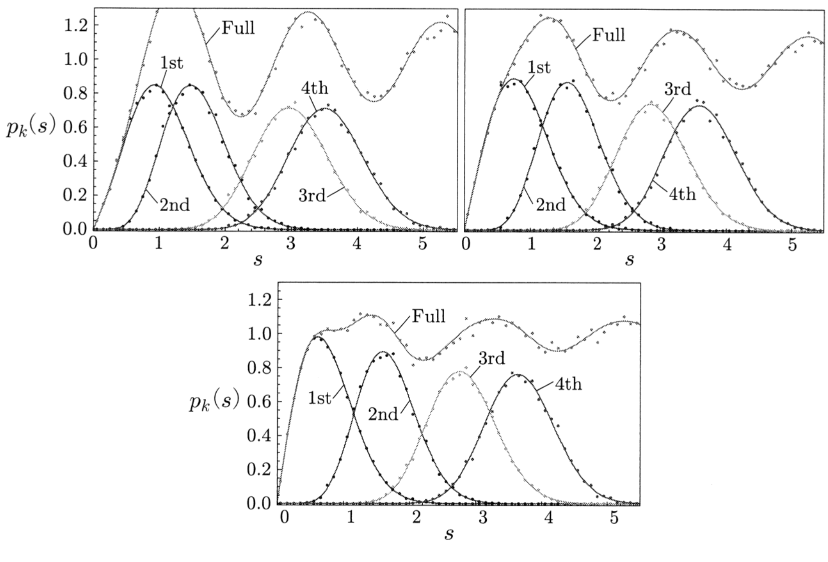


図 7.12　SU(2) ゲージ理論における虚数化学ポテンシャル μ を導入したスタッガードディラック演算子の個別準位分布と，CII-AIII 遷移ランダム行列 (図 7.11) によるフィット[98]．

ディラック演算子（スタッガード型，基本表現）の個別準位のヒストグラムをフィットすることができる（図 7.12）．格子ゲージ場の μ を変化させながらアンフォールドされたディラック準位分布を最適フィットする ρ の値を追跡することにより，両者の比例係数から (7.58) を通じて NG 粒子の崩壊定数 F が精密決定される[97],[98]．

元の理論のディラック演算子がもつ対合的対称性を破る摂動という観点からは，格子上のダブラーを消去するためにカイラル対称性を破る項（ウィルソン項）を加えたディラック演算子の準位統計もランダム行列のスペクトル遷移として捉えられる．この場合には，ゲージ理論のディラック準位統計を AIII-A 遷移ランダム行列の解析的結果にフィットすることにより，ウィルソン型カイラル有効理論に特有な低エネルギー定数のうち，微分を含まない項 $[\mathrm{tr}(U \pm U^\dagger)]^2, \mathrm{tr}(U^2 + U^{\dagger 2})$ の係数である W_6, W_7, W_8 を決定することが可能となる[99],[100]．W_k 自体は有限な格子間隔の導入に伴う非物理的な人工物であるが，上記の準位統計的手法でこれらを決定できればその影響を観測量から差し引くことにより，連続・熱力学極限での物理量を精密に抽出することができる点において技術的な重要性を有している．

7.9 有限温度ゲージ理論とアンダーソン局在

固体結晶中の電子の波動関数が，格子欠陥や結晶中の不純物によって破壊的な干渉を受けて遠方に伝搬しなくなる現象はアンダーソン局在と呼ばれる[101]．電子間相互作用を無視して 1 粒子近似すると，そのハミルトニアンはアンダーソン強束縛模型

$$H = \sum_{\boldsymbol{r}} \epsilon_{\boldsymbol{r}} |\boldsymbol{r}\rangle\langle\boldsymbol{r}| + \sum_{\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\rangle} V_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'} |\boldsymbol{r}\rangle\langle\boldsymbol{r}'|, \tag{7.59}$$

$$V_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}\pm\hat{x}} = \mathrm{e}^{\mp i\alpha r_y},\ V_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}\pm\hat{y}} = V_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}\pm\hat{z}} = 1$$

によって模式化することができる．ここで $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_L^3$ は 3 次元正方格子 $(V = L^3)$ の格子点を，$\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}' \rangle$ は最隣接格子点の対を表す．また不純物を模式化したオンサイトポテンシャル $\epsilon_{\boldsymbol{r}}$ は同一の確率分布に従う独立乱数であり，ホッピング係数 $V_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}$ 中のパラメータ α は結晶の z 方向に印加された磁場を表す．明らかに H は $\alpha = 0$ のとき 2.2 節表 2.1 の AI 型，$\alpha \neq 0$ のとき A 型の対称性クラスに属する（なお AII 型も構成できる）．正規分布する $\epsilon_{\boldsymbol{r}}$ については，H の特性多項式の積 $\langle \prod_k (z_k - iH)^{n_k} \rangle$ に対して 5.1 節に倣ってハバード–ストラトノビッチ変換を施したのち，$\epsilon_{\boldsymbol{r}}$ の分散が十分小さいとしてスペクトル中央でのスケーリング極限をとると，GOE ないし GUE と同一の 0 次元非線形 σ 模型（AI 型ないし A 型）が得られる[44]．従ってこの場合には H の局所的準位統計はランダム行列集団 (GOE, GUE) のそれで記述されることが保証されて

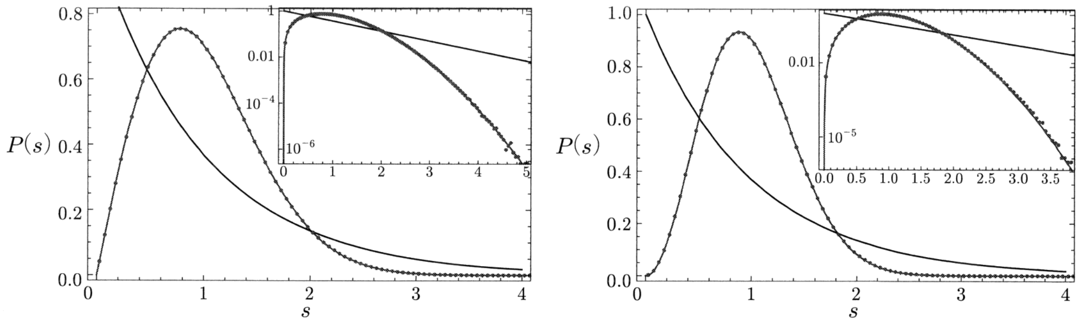


図 7.13 [左] 直交型および [右] ユニタリー型アンダーソン強束縛ハミルトニアンの準位間隔分布．$L^3 = 20^3$, $W = 4$ [左] および $W = 10$, $\alpha = 1.25$ [右]，固有値窓 $[-2, 2]$．実線は GOE または GUE の準位間隔分布とポアソン分布．

おり，H の固有ベクトルはランダム行列のそれと同様に系全体に拡がっている非局在状態である．また，幅 W の箱型一様分布など他の分布についてもランダム行列の普遍性の範疇に入ることが数値実験から示されている（図 7.13）．

一方で，系の無次元コンダクタンスに関するスケーリング理論[102]，あるいは 0 次元化する前の非線形 σ 模型の結合定数に関する繰り込み群[112] において赤外極限で不安定な固定点が存在することから，上記の非局在状態と局在状態を隔てる境界（移動度端）がスペクトル中に存在することが言える．移動度端での準位統計（臨界統計）はポアソン集団とランダム行列集団の中間的性質をもち，固定点に対応することから準位統計関数はスケール不変であることが期待される．しかし，まさに非自明な固定点直上という事情のために非線形 σ 模型の摂動展開が使用できないので，直接的に準位統計関数の厳密解を得ることは困難である．このため，通常のランダム行列の普遍性を破る変形されたランダム行列集団の中から移動度端の有効理論を探す試みが行われた．その試みの中で，漸近的に

$$V(\lambda) \sim \frac{1}{2a}(\log\lambda)^2 \quad (\lambda \gg 1) \tag{7.60}$$

となるポテンシャルをもつ行列集団のうち，特に q^{-1}-変形エルミート集団はスペクトルバルクにおいて並進不変なカーネル

$$K_q(x, x') = \frac{a\vartheta_1(\pi(x - x'), q)}{\pi\vartheta_1'(0, q)\sinh(a(x - x'))}, \quad q := \mathrm{e}^{-\pi^2/a}, \tag{7.61}$$

で記述される準位統計をもち[103]（図 7.14），一つのパラメータ a を用いて極めて精密に臨界統計をフィットできることが認識されてきた[104]–[106]（図 7.15 [上]）．ここで $p_k(s)$ はバルクにおいて $(k-1)$ 個の準位を挟んだ 2 つの準位の間の間隔分布であり，楕円カーネル (7.61) に対する $E_k([0, s])$ (3.19) から $p_k(s) = \frac{d^2}{ds^2}\sum_{\ell=0}^{k-1} E_\ell([0, s])$ により与えられる．

一方，QCD におけるディラック演算子のスペクトルバルクを調べる過程に

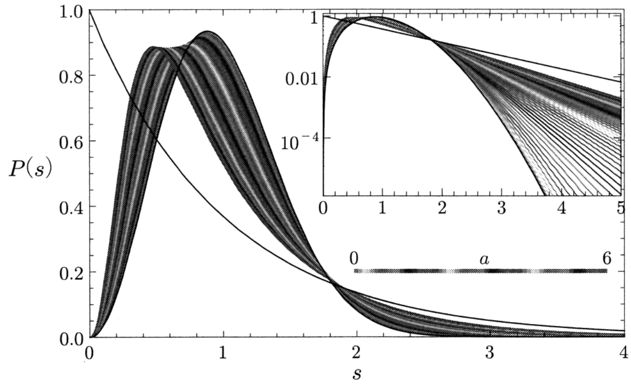


図 7.14　q 変形エルミート集団におけるバルク準位間隔分布 $P(s)$ $[\beta = 2]$．遷移パラメータ a の増加に伴い，ウィグナーおよびポアソン分布間を内挿する．

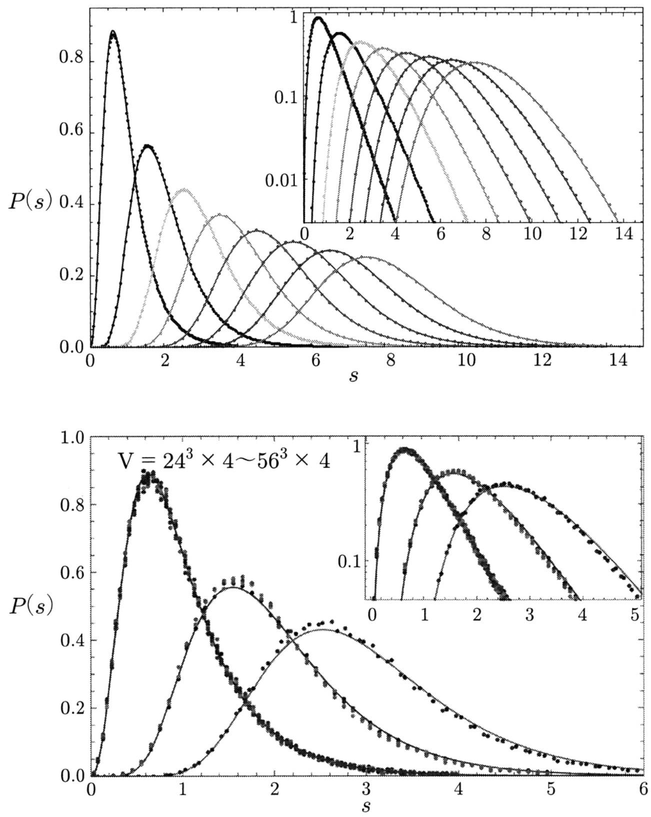


図 7.15　臨界固有値分布と q^{-1}-エルミートランダム行列．[上] 3 次元アンダーソン模型（磁場下）と [下] 3+1 次元 QCD（$N_F = 2+1$，物理点クォーク質量，高温相 $T = 2.6T_c$）の移動度端におけるスケール不変な k-隣接準位間隔分布 $p_k(s)$ を楕円カーネルに 1 パラメータフィットした結果．

おいて，有限温度におけるカイラル相転移または非閉じ込め相転移と，アンダーソン局在との関係が示唆された[107]．この予想の根拠は概ね以下の通りである：

1. QCD の高温領域では空間サイズと比してコンパクト時間方向は相対的に短小なため，内部自由度をもった 3 次元格子系と実質的に見なせる．
2. 非閉じ込め相（クォーク–グルーオンプラズマ相）では孤立した重クォークを空間に置くのに要するエネルギー E を与えるポリヤコフループ

$$E = -T \log P, \quad P = \left\langle \mathrm{tr}\, \mathrm{e}^{i \int_0^{1/T} A_4 dx_4} \right\rangle \simeq \left\langle \mathrm{tr} \prod_{x_4=0}^{L_t-1} U_{x,4} \right\rangle \quad (7.62)$$

は有限の値をとり，その位相は $\{1, \mathrm{e}^{2\pi i/N_C}, \ldots, \mathrm{e}^{2\pi i(N_C-1)/N_C}\}$ のいずれかに集中する．
3. もし P が周囲の値と異なる小領域があれば，それは 3 次元格子における不純物（ランダムポテンシャル）と同様の役割を果たすであろう．

幾つかの混乱の後，ディラックスペクトルにおけるスケール不変な臨界準位統計をもつ移動度端の存在は格子シミュレーションにより実際に確認された[108]．さらに移動度端における k-隣接準位間隔分布 $p_k(s)$ が，3 次元アンダーソン模型の場合と統計誤差内で同一のパラメータ a をもつ楕円カーネルのそれによってよくフィットされることも示されている（図 7.15 [下]）．また，移動度端の位置は温度の降下とともにスペクトルの原点に近づき，閉じ込め相転移近傍で原点に一致して消失する[110]．これらの知見から，従来議論の対象となってきた閉じ込め相転移（ポリアコフループ (7.62) が秩序変数）とカイラル相転移（ディラックスペクトルの原点での挙動 (7.8) が秩序変数）の関連（物理点での基本表現クォークの場合，両者がほぼ同一の温度 $T_c \simeq 170\,\mathrm{MeV}$ で起こること）をアンダーソン局在に求めることが提案されている．

第 8 章

エピローグ：周期軌道と NG 粒子

古典極限がカオス的である多自由度の量子系のエネルギー準位の統計的挙動を解明するための手段として，本書で扱ってきた，行列を自由度とするランダム行列理論・非線形 σ 模型と，経路積分の半古典近似に依拠した周期軌道論[111]という 2 形式がほぼ独立に発展してきた．前者は系の詳細を捨象したブラックボックスから普遍的性質を抽出する熱力学的手法であるのに対し，後者は個々の古典軌道に適切な重みを付して総和する統計力学的手法であって，準位揺動の普遍的な部分と系に固有な成分の双方を扱えるという特徴をもっている．本章では，巨視的な熱力学が微視的な統計力学から導かれるように，ランダム行列の普遍的準位統計がカオス系の周期軌道論から導かれることを概説する．

8.1 周期軌道論

まずは対象とする物理的手法に馴染んでいただくため，周期軌道論を駆け足で紹介する[17]．その起点は，量子力学におけるハミルトニアン演算子 H のレゾルベントに対する経路積分表示

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\frac{1}{E_+ - H} &= \int d\boldsymbol{Q}\langle\boldsymbol{Q}|\frac{1}{E_+ - H}|\boldsymbol{Q}\rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar}\int d\boldsymbol{Q}\int_0^\infty dT\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}ET}\int_{\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{q}(T)=\boldsymbol{Q}}\mathcal{D}\boldsymbol{q}\ \ \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}I[\boldsymbol{q}]} \end{aligned} \tag{8.1}$$

である．ここで $I[\boldsymbol{q}] \equiv \int_0^T L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})dt$ は作用であり，経路積分 $\int_{\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{q}(T)=\boldsymbol{Q}}\mathcal{D}\boldsymbol{q}$ は時間 T 後に座標 $\boldsymbol{Q}$ に回帰する全ての経路にわたる和を表す．T 積分を収束させるため E に微小な正の虚部をもたせたことを E_+ と記した．古典量である $I[\boldsymbol{q}]$ は $\hbar$ と比べて極めて大きいとすると，(8.1) 式の経路積分は停留条件 $\delta I[\boldsymbol{q}]=0$ を満たす古典軌道 a の周りのガウス型積分の和で近似できる（WKB 近似）．さらに起終点の座標 $\boldsymbol{Q}$ および回帰時間 T についての積分にも WKB 近似を適用すると，前者は運動量 $\boldsymbol{p}(T)=\frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{q}(T)}$，$\boldsymbol{p}(0)=-\frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{q}(0)}$ にも回帰性

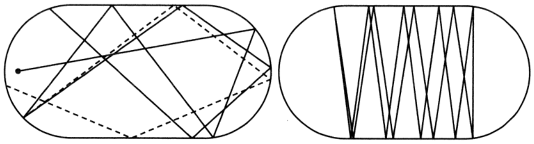


図 8.1　スタジアム型ビリヤードにおける初期条件の微小な差の拡大（左）と周期軌道の例（右）.

$\boldsymbol{p}(T)=\boldsymbol{p}(0)$ を課し，後者は $I_a(T)$ から簡略作用 $S_a(E)=\oint_a \boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{q}$ へのルジャンドル変換を行うことになる.

ここまでは力学系を問わない一般論であるが，以下では本章の主題であるカオス系に話を限る．カオス的な力学系では力学的自由度の数に比べて保存量の数が少ないために変数分離ができず，正のリアプノフ指数（定理 1.2）をもつために初期条件の微小な差が時間とともに指数関数的に拡大する（図 8.1）．このとき鞍点となる周期軌道は位相空間中で孤立して分布するので，レゾルベントはその総和として次のように表される：

定理 8.1（グッツヴィラーの跡公式） レゾルベントは周期軌道に渉る離散和として半古典近似される：

$$\mathrm{tr}\,\frac{1}{E_+-H}\simeq -i\pi\bar{\rho}(E)-\frac{i}{\hbar}\sum_{a\in\,\text{周期軌道}} T_a(E)\,F_a(E)\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S_a(E)}. \tag{8.2}$$

ここで軌道の周期 T_a は $\int d\boldsymbol{Q}$ のうち軌道に沿う成分（WKB 近似は適用できず厳密に扱う）に由来し，また安定性振幅 $F_a=|\det(M_a-I)|^{-1/2}$（M_a は周期軌道 a に沿うモノドロミー行列）は軌道に垂直な成分のガウス型積分によるプレファクターとして現れる*1)．平均状態密度 $\bar{\rho}(E)$ に比例する第 1 項は長さ 0 の周期軌道の寄与である．作用と周期の関係 $\frac{d}{dE}S_a(E)=T_a(E)$ を用いて (8.2) 式を E について不定積分すると，特性多項式 $\Delta(E)\equiv\det(E-H)$ に対する半古典近似式を得ることもできる：

$$\Delta(E_+)\propto\prod_{a\in\,\text{周期軌道}}\exp\Bigl(-F_a(E)\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S_a(E)}\Bigr). \tag{8.3}$$

8.2　2 準位相関関数

量子カオス論における準位相関関数は，エネルギー準位の数直線上に設けた，全体から見ると小さな幅であるが十分多数の準位を含む「窓」の中の数個の準位の相関を測定し，窓の位置についてスペクトル全体に渉る平均をとったものとして定義される．本節では 2 つの固有値の相関を測る特性多項式の積

*1)　マスロフ指数（1 周期中の反射の回数）は F_a に含めた.

$$Z(\epsilon_+,\epsilon'_-) \equiv \left\langle \Delta\Big(E+\frac{\epsilon_+}{\bar\rho(E)}\Big)\Delta\Big(E+\frac{\epsilon'_-}{\bar\rho(E)}\Big)\right\rangle_E \tag{8.4}$$

を例として考える．なおスペクトル平均 $\langle\cdots\rangle_E$ をとる前に，上のように中心値 E の窓に属するエネルギー変数は窓中の平均状態密度 $\bar\rho(E)$ で割ることにより平均準位間隔を 1 に規格化（アンフォールド）する必要がある．これに (8.3) 式およびその複素共役を代入して展開すると，$Z(\epsilon_+,\epsilon'_-)$ は

$$(-1)^{|A|+|B|}F_AF_B^*\ \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar\bar\rho}(\epsilon T_A-\epsilon' T_B)}\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(S_A(E)-S_B(E))} \tag{8.5}$$

の形の項の線形和で書かれる．ここで周期軌道の組（準周期軌道）を $A=\{a_1,a_2,\ldots\}$ と記し，その作用 S_A と周期 T_A は個々の成分の和，安定性指数 F_A は個々の指数の積とした．これらの項は，エネルギー殻 $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=E$ 上の複数の周期軌道の作用の符号付き和があらゆる E に対して $O(\hbar^1)$ になる場合に限りスペクトル平均後に 0 でない寄与を与える．個々の軌道の作用が $S_a\gg\hbar$ であることを考慮すると，この現象が無関係な周期軌道の間に偶然起るとは考えられず，周期軌道が組として完全に一致する（対角項）か，あるいはたかだか微小な「組替え」部分を除いて一致する場合（非対角項）のみに起こり得る．従って 2 準位相関関数は，それぞれが経路積分 (8.1) の鞍点である図 8.2 のような周期軌道の組（ズィーバー–リヒター対[113]）の総和として表されることに気付く．場の量子論を学習中の読者の中には，この形からファインマン図形を連想する方もおられるであろう．「ではどのような場の理論のファインマン図形か？」との問いは自然な疑問である．

量子多体系の理論 A の摂動論に現れる素励起（例：ティリング模型のフェルミオン場）と理論 B のソリトン型古典解（例：サイン–ゴードン理論のキンク）の間の対応を通じて両理論が同一視できる場合，理論の組は**双対性**をもつといわれ，理論物理学における現代的なキーワードとなっている．双対的な理論の組は 2 次元イジング模型などの統計系から超弦理論に至る諸分野において広範に発見されており，両側の理論を相補的かつ包括的に捉えることを可能

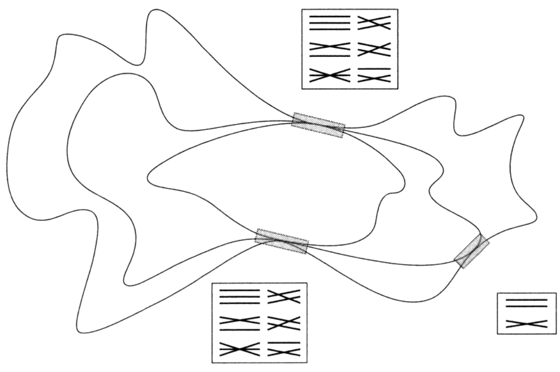


図 8.2　組替え部分を除いて一致する周期軌道の組．

にする．本題である量子カオス論においても，古典解サイドには周期軌道の組（図 8.2），および摂動論サイドには行列値変数の積分である非線形 σ 模型のファインマン図形（図 8.3）を配する 1 対 1 対応を通じた両形式の等価性が発見され，これを通じて量子カオス系の準位統計がランダム行列の普遍性に属すること，すなわち BGS 予想（1.6 節）が半古典近似の枠内で証明された[24]．次節ではこの重要な成果について述べる．

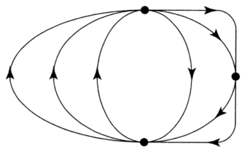


図 8.3　非線形 σ 模型のファインマン図形.

8.3　周期軌道/σ 模型対応

準位統計の普遍性は，レプリカ対称性の自発的破れとそれに随伴した非線形 σ 模型がリー群論によって有限 (10) 種類に分類されることに起因する（第 5 章）．BGS 予想が真であるならば，いずれかの種類の非線形 σ 模型をカオス系の周期軌道論から直接，導出できるはずである．ここでは時間反転対称性などの対合的対称性をもたないクラス A の 2 自由度系について $Z(\epsilon, \epsilon')$ を評価する[8]．その非対角項に寄与する最も簡単な準周期軌道の組は，$A = \{a\}$（∞ 型の実線）および $B = \{b_1, b_2\}$（2 つの O 型の点線）が網掛けの領域において邂逅する構造である（図 8.4）．周期軌道 a が載る 3 次元のエネルギー殻 $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = E$ を邂逅領域（時間幅 t_{enc}）のどこかで軌道に垂直に切った 2 次元のポアンカレ断面を右図に描いた．全域で双曲的なカオス系では断面は 1 つの安定方向（s 軸）と 1 つの不安定方向（u 軸）をもつが，左図のように軌道が時間発展するためには，各々の軌道はちょうど $s \times u$ の長方形状に断面を貫かなければならない．このとき準周期軌道の作用の差が $\Delta S = su$ であることを示せる．従ってこの軌道の組の寄与は，$F_a \simeq F_{b_1} F_{b_2}$ と近似すれば

$$(-1)^3 |F_a|^2 \, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar\bar{\rho}}(\epsilon - \epsilon')T_a} \, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar} su} \tag{8.6}$$

となる．また，周期 T_a の軌道 a の断面中に $(s, u) \sim (s + ds, u + du)$ だけ隔たった 2 点が存在する確率密度は，カオス系の軌道が体積 Ω のエネルギー殻内を一様に這い回ること（エルゴード性）を用いれば

$$\frac{ds\, du\, T_a \int_{t_{\mathrm{enc}}}^{T_a - t_{\mathrm{enc}}} dt}{\Omega\, t_{\mathrm{enc}}} \tag{8.7}$$

である．従って図 8.4 の構造の寄与は，(8.6)×(8.7) を周期軌道および断面の

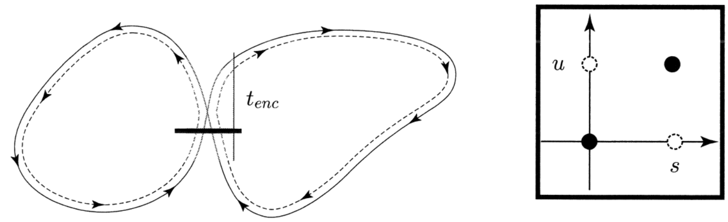


図 8.4　準周期軌道の組（左）とポアンカレ断面（右）.

長方形の形状について総和した

$$-\sum_{a\in\text{周期軌道}}|F_a|^2\,\frac{T_a}{T_H}\underbrace{\iint\frac{ds\,du}{2\pi\hbar}\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}su}}_{=1}\mathrm{e}^{i2\pi(\epsilon-\epsilon')\frac{T_a}{T_H}}\int\frac{dt}{t_{\mathrm{enc}}} \tag{8.8}$$

で与えられる．ここで状態密度に対するワイルの法則（定理 1.3），$2\pi\hbar\bar{\rho}=\Omega/2\pi\hbar\equiv T_H$ を用いた．さらに，エルゴード性から従うハネイ–オゾリオ デアルメイダの和則[114]

$$\sum_a|F_a|^2 f(T_a)\simeq\int_0^\infty\frac{dT}{T}f(T) \tag{8.9}$$

を用いた上で時間の積分変数を (t,T) から左右のリンク部分の所要時間に変更すると，各々の積分はリンク因子 $1/(-ix)$ を与える．ここで $x\equiv 2\pi(\epsilon-\epsilon')$ と略記した．最後に残る指数関数を展開したうち $\hbar\to 0$ で生き残る項は分母の t_{enc} と同数（この場合は 1 個）の邂逅因子 ix となる．以上は任意の軌道構造に対して一般化でき，各々の構造の寄与は，

$$(\text{対称性因子})\times(-1)^{\#\text{軌道}}\frac{(ix)^{\#\text{邂逅}}}{(-ix)^{\#\text{リンク}}} \tag{8.10}$$

となることが証明される．

一方，クラス A のランダム行列の $Z(\epsilon,\epsilon')$ を与える σ 模型は，5.6 節表 5.1 の第 1 行のとおり，対称空間 $\mathrm{U}(2)/\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)\simeq S^2$ 上の積分

$$Z(\epsilon_+,\epsilon'_-)=\int_{\mathbb{C}}d\mu(z)\,\exp\left(i\pi\,\mathrm{tr}\,\varepsilon T^{-1}\sigma_3 T\right), \tag{8.11}$$

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}\epsilon'_- & 0\\ 0 & \epsilon_+\end{pmatrix},\ T=I+i\begin{pmatrix}0 & z^*\\ z & 0\end{pmatrix}$$

で与えられることが示される[112]．この積分は初等的に行えて

$$\int_{\mathbb{C}}\frac{dz\,dz^*}{2\pi(1+zz^*)^2}\exp\left(-\frac{ix}{2}\frac{1-zz^*}{1+zz^*}\right)=\frac{\sin(x/2)}{x/2} \tag{8.12}$$

と，正弦カーネル (4.13) になる．いま，あえて $x\gg 1$ を仮定して積分変数 T を単位行列 I（S^2 の南極）の周りに摂動展開してみると，上式の指数部は

$$-\frac{ix}{2}\frac{1-zz^*}{1+zz^*}=-\frac{ix}{2}+ixzz^*-ix(zz^*)^2+ix(zz^*)^3-\cdots \tag{8.13}$$

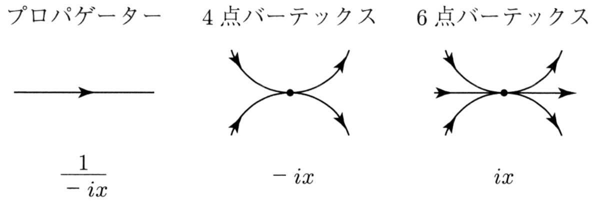


図 8.5　AIII 型 0 次元非線形 σ 模型のファインマン規則．頂点に入る矢印は z，出る矢印は z^* を表す．

となる．これから読み取れるファインマン規則（図 8.5）は周期軌道論から導かれる (8.10) と全く同一である．このため，例えば図 8.2 の寄与

$$(\text{対称性因子}) \times \frac{(-ix)^1(ix)^2}{(-ix)^8} \tag{8.14}$$

は，対応する図 8.3 の周期軌道の構造の寄与と係数を含めて一致する．また，積分の WKB 近似値（0 次 +1 次摂動）$\mathrm{e}^{-ix/2}\, i/x$ が周期軌道の対角和と一致することも確認できる．これらの摂動的寄与を総和し*2)，さらに摂動では見えない不安定な鞍点である無限遠点（この例では S^2 の北極）近傍の寄与を対称空間へのワイル群の作用（周期軌道論の言葉ではリーマン–ジーゲル的再和公式[115]）によって取り入れることにより，正弦カーネルが厳密に再現される．以上を総括すると，周期軌道論と非線形 σ 模型の等価性を標語化した

カオス系における 古典粒子の周期運動	=	レプリカ対称性の破れに伴う **NG** 粒子の量子的な生成消滅

に至る．第 7 章では右欄のレプリカ対称性をカイラルフレーバー対称性，NG 粒子を π 中間子と同定することにより，QCD の ε 領域におけるディラック準位統計がランダム行列理論で記述されるという事実を解説した．上の観点では，π 中間子の古典的運動がカオス的であることがその根拠であることを確認して，本書を閉じることとする．

*2）　クラス A の σ 模型はシンプレクティック多様体である $\mathrm{U}(2n)/\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(n)$ の高さ関数を作用とする特殊性のため，ドゥイスタマート–ヘックマン局在定理により実は各次数で高次摂動項の和は 0 になる．

付録 A
4 元数

本書で利用する 4 元数および 4 元数行列の代数的性質を以下にまとめる．

A.1　定義

4 元数体は，乗法の単位元 $\mathbf{1}$ および

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -\mathbf{1} \tag{A.1}$$

を満たす基本単位 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ の線形和である 4 元数

$$\boldsymbol{q} = q_0\mathbf{1} + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}, \quad q_\mu \in \mathbb{C} \tag{A.2}$$

を要素とする非可換結合体である．基本関係式 (A.1) は 2×2 複素行列表現

$$\mathbf{1} \leftrightarrow I_2, \quad \boldsymbol{i} \leftrightarrow i\sigma_3, \quad \boldsymbol{j} \leftrightarrow i\sigma_2, \quad \boldsymbol{k} \leftrightarrow i\sigma_1 \tag{A.3}$$

をもち，単位行列 I_2 およびパウリ行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は 2×2 行列の基底を張るため，4 元数と複素 2×2 行列は 1 対 1 対応する．本書ではこの両者を同一の太字記号で表し，いずれの意味であるかは文脈によって区別する．$\boldsymbol{q}$ の双対 4 元数を

$$\bar{\boldsymbol{q}} = q_0\mathbf{1} - q_1\boldsymbol{i} - q_2\boldsymbol{j} - q_3\boldsymbol{k} \tag{A.4}$$

で定義する．このとき

$$\overline{\boldsymbol{qp}} = \bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{q}} \tag{A.5}$$

が成り立つことは，$\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ に各々 4 つの基本単位を代入して確認できる．双対 4 元数は複素 2×2 行列表示を用いると

$$\overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \tag{A.6}$$

となる．また，4 元数のスカラー部分を

$$\boldsymbol{q}^{(0)} = q_0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{q} \tag{A.7}$$

で定義する．明らかに $\bar{\boldsymbol{q}}^{(0)} = \boldsymbol{q}^{(0)}$ である．また (A.7) におけるトレースの巡回性から，

$$(\boldsymbol{qp})^{(0)} = (\boldsymbol{pq})^{(0)}$$

である．スカラー部分のみからなる 4 元数 $q_0\mathbf{1}$ をスカラー 4 元数と呼ぶ．$\boldsymbol{q}+\bar{\boldsymbol{q}}$ は明らかにスカラー 4 元数である．

実 4 元数体 $\mathbb{H}$ は，(A.2) において特に $q_\mu \in \mathbb{R}$ となる実 4 元数を要素とする非可換結合体である．その要素の複素 2×2 行列表現は

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} z^* & -w \\ w^* & z \end{bmatrix}, \quad z, w \in \mathbb{C} \tag{A.8}$$

である．

A.2 4 元数行列

4 元数を要素とする正方行列

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_{jk}]_{j,k=1,\ldots,N} \tag{A.9}$$

に対して，その双対行列を

$$\boldsymbol{A}^D = \left[\bar{\boldsymbol{A}}_{kj}\right]_{j,k=1,\ldots,N} \tag{A.10}$$

で定義する．$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^D$ となる 4 元数行列を自己双対行列と呼ぶ．定義 (A.10) と (A.5) から，

$$(\boldsymbol{AB})^D = \boldsymbol{B}^D\boldsymbol{A}^D \tag{A.11}$$

が成り立つ．また，(A.6) を用いると $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^D$ の複素行列表現は，行ないし列の交換および符号の反転をそれぞれ偶数回行うことで移り合えるため，

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^D. \tag{A.12}$$

補題 A.1（自己双対と反対称） 自己双対行列 $\boldsymbol{A}$ の複素行列表現に歪単位行列 $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\,(\boldsymbol{j},\ldots,\boldsymbol{j}) = \mathrm{diag}\,(i\sigma_2,\ldots,i\sigma_2)$ をかけた $\boldsymbol{JA}$ は反対称行列である．

[証明] 自己双対性から $\boldsymbol{A} = A^{(0)}\mathbf{1} + A^{(1)}\boldsymbol{i} + A^{(2)}\boldsymbol{j} + A^{(3)}\boldsymbol{k}$ において $A^{(0)}$ は対称，$A^{(1,2,3)}$ は反対称行列である．また $\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}$ の複素行列表現は対称，$\boldsymbol{j}$ の複素行列表現は反対称行列であるから，$\boldsymbol{JA} = \boldsymbol{jA} = A^{(0)}\boldsymbol{j} - A^{(1)}\boldsymbol{k} - A^{(2)}\mathbf{1} + A^{(3)}\boldsymbol{i}$ の各項はいずれも反対称行列である．□

特に実 4 元数を要素とする行列について，(A.8) を用いると 4 元数行列としての双対は 2×2 ブロック行列から構成される複素行列としてのエルミー

ト共役と一致する．従って，実 4 元数 $N \times N$ 自己双対行列 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^D$ は複素 $2N \times 2N$ 行列としてエルミート $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\dagger$ である．

A.3 4 元数行列式

$N \times N$ 自己双対行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，4 元数行列式 qdet を以下により定義する：

$$\begin{aligned}&\operatorname{qdet} \boldsymbol{A}\\&= \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^{N-\ell} \left(\boldsymbol{A}_{a_1 b_1} \boldsymbol{A}_{b_1 c_1} \cdots \boldsymbol{A}_{d_1 a_1}\right)^{(0)} \cdots \left(\boldsymbol{A}_{a_\ell b_\ell} \boldsymbol{A}_{b_\ell c_\ell} \cdots \boldsymbol{A}_{d_\ell a_\ell}\right)^{(0)}.\end{aligned} \tag{A.13}$$

ただし総和中の任意の置換 σ は ℓ 個の独立な巡回置換

$$(a_1 \to b_1 \to \cdots \to d_1 \to a_1), \ldots, (a_\ell \to b_\ell \to \cdots \to d_\ell \to a_\ell)$$

の積からなると表記した．また $(-1)^{N-\ell} = \operatorname{sgn}(\sigma)$ である[*1]．(A.13) の総和において，長さ 3 以上のある巡回部分の向きのみが異なる $((a \to b \to \cdots \to d \to a)$ と $(a \to d \to \cdots \to b \to a))$ 2 つの置換 σ, σ' からの寄与を考える．自己双対性より $\overline{\boldsymbol{A}_{ab} \boldsymbol{A}_{bc} \cdots \boldsymbol{A}_{da}} = \overline{\bar{\boldsymbol{A}}_{ba} \bar{\boldsymbol{A}}_{cb} \cdots \bar{\boldsymbol{A}}_{ad}} = \boldsymbol{A}_{ad} \cdots \boldsymbol{A}_{cb} \boldsymbol{A}_{ba}$ であるから，スカラー部分 ${}^{(0)}$ をとらずに両者を総和しても非スカラー部分は相殺する．従って σ, σ' 中のこの巡回置換部分はいずれも ${}^{(0)}$ 記号を外してよい．また，長さ 1 および 2 の巡回置換部分はもともとスカラー部分しかもたないので ${}^{(0)}$ 記号は不要である．この操作において，注目した巡回部分以外は同一の順序に並べられているものとすると操作を繰り返すことができて総和はスカラー 4 元数になり，

$$\begin{aligned}&\operatorname{qdet} \boldsymbol{A}\\&= \left(\sum_{\sigma \in S_N} (-1)^{N-\ell} (\boldsymbol{A}_{a_1 b_1} \boldsymbol{A}_{b_1 c_1} \cdots \boldsymbol{A}_{d_1 a_1}) \cdots (\boldsymbol{A}_{a_\ell b_\ell} \boldsymbol{A}_{b_\ell c_\ell} \cdots \boldsymbol{A}_{d_\ell a_\ell})\right)^{(0)}\end{aligned} \tag{A.14}$$

が得られる．

$2N \times 2N$ 反対称行列 B のパフィアン $\operatorname{Pf} B$ は，

$$\operatorname{Pf} B = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) B_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots B_{\sigma(2N-1)\sigma(2N)} \tag{A.15}$$

と定義される．ここで $\sum_\sigma$ は $2N$ 個の要素 $(1, 2, \cdots, 2N)$ を N 個の順序付けられた対 $(\sigma(1), \sigma(2)), \ldots, (\sigma(2N-1), \sigma(2N))$ [ただし $\sigma(2i-1) < \sigma(2i)$, $\sigma(2i+1)$] に分割する，$(2N-1)!!$ 通りの置換についての総和である．パフィ

*1) 長さ n_i の巡回置換の符号は $(-1)^{n_i - 1}$ なので $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\sum_{i=1}^{\ell}(n_i - 1)} = (-1)^{N-\ell}$.

アンと行列式が

$$(\mathrm{Pf}\,B)^2 = \det B \tag{A.16}$$

の関係にあることはよく知られている．次の補題は，4 元数行列式とその複素行列表現の行列式およびパフィアンを結びつける：

補題 A.2（4 元数行列式，行列式，パフィアン） 4 元数 $N \times N$ 自己双対行列 $\boldsymbol{A}$ およびその複素 $2N \times 2N$ 行列表現に対して，

$$(\mathrm{qdet}\,\boldsymbol{A})^2 \;=\; \det \boldsymbol{A}, \tag{A.17}$$

$$\mathrm{qdet}\,\boldsymbol{A} \;=\; \mathrm{Pf}\,\boldsymbol{JA}. \tag{A.18}$$

[証明] 上式は代数的等式であるから，複素行列としての $\boldsymbol{A}$ の要素が実数の場合 $\boldsymbol{A}_{jk} = a_{jk}\mathbf{1} + b_{jk}\boldsymbol{j}$, $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}$ に証明すれば十分である．このとき $\boldsymbol{A}_{jk}$ の乗法は複素数 $z_{jk} = a_{jk} + b_{jk}i$ と同型となる．従って $Z = (z_{jk})_{j,k=1,\ldots,N}$ とすると，$\mathrm{qdet}\,\boldsymbol{A}$ は通常の Z の行列式の定義に一致する：

$$\mathrm{qdet}\,\boldsymbol{A} = \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^{N-\ell} (z_{a_1 b_1} \cdots z_{d_1 a_1}) \cdots (z_{a_\ell b_\ell} \cdots z_{d_\ell a_\ell}) = \det Z.$$

また，ユニタリー行列 $U = \mathrm{diag}(u, \ldots, u)$, $u = 2^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を相似変換してから行と列の順番を入れ替えると $U\boldsymbol{A}U^\dagger = \mathrm{diag}(Z, Z^*)$ となり，$\det \boldsymbol{A} = \det Z \det Z^*$ が成り立つ．さらに $\boldsymbol{A}$ の自己双対性から Z のエルミート性が従うから $\det Z^* = \det Z$ となり (A.17) が従う．補題 A.1 より $\boldsymbol{JA}$ は反対称行列であるからパフィアンが定義でき，$(\mathrm{Pf}\,\boldsymbol{JA})^2 = \det \boldsymbol{J} \det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}$ となる．従って $\mathrm{qdet}\,\boldsymbol{A} = \pm\,\mathrm{Pf}\,\boldsymbol{JA}$ であるが，$\boldsymbol{A} = I_{2N}$ のとき両者とも 1 となるから符号は $+$ であり，(A.18) が従う．□

任意の（自己双対とは限らない）4 元数正方行列 $\boldsymbol{Q}$ に対して $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QQ}^D$ は自己双対行列であるから 4 元数行列式が定義でき，(A.17) および (A.12) より $(\mathrm{qdet}\,\boldsymbol{QQ}^D)^2 = \det \boldsymbol{QQ}^D = (\det \boldsymbol{Q})^2$ となる．従って $\det \boldsymbol{Q} = \pm\,\mathrm{qdet}\,\boldsymbol{QQ}^D$ であるが，$\boldsymbol{Q} = I_{2N}$ のとき両者とも 1 となるから符号は $+$ であり，

$$\det \boldsymbol{Q} = \mathrm{qdet}\,\boldsymbol{QQ}^D \tag{A.19}$$

が補題 A.2 の系として得られる．

演習問題

A.1 4 元数 2×2 自己双対行列 $\boldsymbol{A}$ について (A.13), (A.15) に従って $\mathrm{qdet}\,\boldsymbol{A}$, $\mathrm{Pf}\,\boldsymbol{JA}$, および $\sqrt{\det \boldsymbol{A}}$ を計算し，いずれも $A_{11}^{(0)} A_{22}^{(0)} - \sum_{\mu=0}^{3} (A_{12}^{(\mu)})^2$ となることを示せ．

付録 B リー代数の表現

B.1 リー代数

$\mathfrak{g}$ を複素ベクトル空間とする．双線形写像 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ で

$$\text{反対称性：}[x, y] = -[y, x], \tag{B.1}$$

$$\text{ヤコビ律：}[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \ {}^{\forall}x, y, z \in \mathfrak{g} \tag{B.2}$$

を満たすもの（リー括弧）が定義されているとき，$\mathfrak{g}$ をリー代数と呼ぶ．$\mathfrak{g}$ の基底を生成子と呼び $\{T^a\}$, $a = 1, \ldots, \dim\mathfrak{g}$ と記す．このとき

$$[T^a, T^b] = i \sum_c f^{abc} T^c \tag{B.3}$$

と展開できる．$\{f^{abc}\}$ は構造定数と呼ばれ，(B.1), (B.2) のために完全反対称にとれる．

B.2 表現

V を複素ベクトル空間とする．V 上の準同型で，交換子をリー括弧とするリー代数を $\mathrm{gl}(V)$ と記す：

$$[A, B] := A \circ B - B \circ A, \quad {}^{\forall}A, B \in \mathrm{gl}(V). \tag{B.4}$$

リー括弧を保つ準同型写像 $R : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$,

$$[R(x), R(y)] = R([x, y]), \quad {}^{\forall}x, y \in \mathfrak{g} \tag{B.5}$$

を表現と呼ぶ．$R(x)$ を x_R とも表記し，以下では $\circ$ は略記する．生成子の像 T^a_R は (B.3) と同じ

$$[T^a_R, T^b_R] = i \sum_c f^{abc} T^c_R \tag{B.6}$$

を満たす．以下では $\mathfrak{g}$ として $\mathrm{u}(N)$ およびその部分リー代数を考え，表現空間 V が $R(\mathfrak{g})$ の作用の下で不変となる真部分空間をもたない場合（既約表現）に制限する．基本表現 F（ないし定義表現）は $\dim V = N$ である既約表現であり，$\{T_F^a\}$ は $N \times N$ エルミート行列である．(B.6) のエルミート共役をとると $f^{abc} \in \mathbb{R}$ が従う．また (B.6) の複素共役をとると

$$[(T_R^a)^*, (T_R^b)^*] = -i \sum_c f^{abc} (T_R^c)^* \tag{B.7}$$

であるから，$R(\cdot)$ が $\mathfrak{g}$ の V 上の表現であれば $\bar{R}(\cdot) := -R(\cdot)^*$ も $\mathfrak{g}$ の V 上の表現になる．$\bar{R}$ と R の関係は以下のいずれかに分類される：

1. **非複素表現**：$\bar{R}$ と R はユニタリー同値である，すなわち V に作用するあるユニタリー写像 Ω によって，$\bar{R}(\cdot) = \Omega^{-1} R(\cdot)\Omega$, $\Omega\bar{R}(\cdot) = R(\cdot)\Omega$ とできる．複素共役を 2 回繰り返すと $\bar{\bar{R}} = R$ であるから，

   $$\Omega\Omega^* R(x) = R(x)\Omega\Omega^* \ ({}^\forall x \in \mathfrak{g}) \ \Rightarrow \ \Omega\Omega^* = I \text{ または } -I$$

   のいずれかとなる．前者の対称ユニタリー写像 $\Omega = \Omega^T$ および後者の反対称ユニタリー写像 $\Omega = -\Omega^T$（$\dim V$ が偶数の場合のみ存在）はそれぞれある対称ユニタリー写像 U によって $\Omega = UU$ および $\Omega = U\boldsymbol{J}U$（$\boldsymbol{J}$ は補題 A.1 で定義）と表される．従ってこれら 2 種類の表現はそれぞれユニタリー変換 $U^{-1}R(\cdot)U \mapsto R(\cdot)$ によって
   1a. **実表現**：$\bar{R}(\cdot) = R(\cdot)$ とできる．
   1b. **擬実表現**：$\bar{R}(\cdot) = \boldsymbol{J}^{-1} R(\cdot)\boldsymbol{J}$ とできる．

2. **複素表現**：$\bar{R}$ と R はユニタリー同値でない．

V に対する複素共役操作 K と反交換子記号 $\{A, B\} := AB + BA$ を用いると，1a, 1b の条件はそれぞれ

$$\{R(\cdot), \Omega K\} = 0, \quad \Omega = I \text{ または } \boldsymbol{J} \tag{B.8}$$

とも表される．この ΩK は反線形同変写像と呼ばれる．

B.3 表現の例

例 1：$\mathrm{u}(1)$ の自明でない表現 $R(x) = mx$ $(m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$ は複素である．
例 2：$\mathrm{o}(N)$, $\mathrm{sp}(2N)$ の基本表現はそれぞれ定義から直ちに実，擬実である．$\mathrm{su}(N \geq 3)$ の基本表現は複素である．
例 3：$\mathrm{su}(2) = \mathrm{sp}(2)$ であるため，$\mathrm{su}(2)$ の基本表現 F は擬実である．その生成子であるパウリ行列 $T_F^a = \sigma_a$ $(a = 1, 2, 3)$ は，$\Omega = i\sigma_2 = \boldsymbol{j}$ を用いて $(i\sigma_2)^{-1}\sigma_a(i\sigma_2) = -\sigma_a^*$ を満たす．

例 4：V として $\mathfrak{g}$ 自身をとって $Ad(x)y = [x, y]$ と定義すると，ヤコビ律により表現になる（随伴表現）．随伴表現 Ad の生成子は $(T^a_{Ad})^{bc} = -if^{abc}$ であり，構造定数の実数性のために $-(T^a_{Ad})^* = T^a_{Ad}$ を満たすので実表現である．

演習問題

B.1　(B.1), (B.2) を用いて，

i. $\{f^{abc}\}$ の完全反対称性を示せ．

ii. 随伴表現の生成子 $(T^a_{Ad})^{bc} = -if^{abc}$ が (B.6) を満たすことを示せ．

参考文献

まえがき

[1] A. Einstein, Verh. Deut. Phys. Ges. **19** (1917) 82. 現代的な用語法を用いた校訂英訳（C. Jaffe による）は，A. Einstein, JILA Report **116** (1980), `https://jila.colorado.edu/sites/default/files/assets/files/publications/JILA%20Report%20No.116_0.pdf`.

[2] J. Wishart, Biometrika **20A** (1928) 32.

[3] E.P. Wigner, in Proceedings of *Conference on Neutron Physics by Time-of-Flight*, 59 (1956), `http://www.ornl.gov/info/reports/1957/3445602508212.pdf`.

[4] F.J. Dyson, J. Math. Phys. **3** (1962) 140 ほか 6 編.

教科書

[5] ランダム行列理論に関する古典的教科書は，M.L. Mehta, *Random Matrices*, 3rd Ed. (Elsevier, Amsterdam 2004).

[6] ランダム行列理論の基礎から近年の発展までを網羅した包括的な教科書としては，P.J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*, London Mathematical Society Monographs (Princeton Univ. Press, 2010).

[7] 邦文のランダム行列理論の教科書としては，永尾太郎，ランダム行列理論の基礎（東京大学出版会, 2005）.

第 2～3 章における固有値分布関数と（歪）直交多項式法の導出は，以上 3 つの教科書に概ね沿っている.

[8] 量子カオス論，およびそれへのランダム行列理論の適用を総括した教科書としては，F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, 2nd Ed. (Springer Verlag, Heidelberg 2001).

[9] ランダム行列の広範な数理物理への応用は，数理科学：ランダム行列の広がり（サイエンス社, 2007 年 2 月号）.

[10] 場の量子論に関する包括的な邦文教科書としては，九後汰一郎，ゲージ場の量子論 I, II [新物理学シリーズ]（培風館, 1989）.

[11] 経路積分を主体とした場の量子論の読みやすい教科書は，A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, 2nd Ed. (Princeton Univ. Press, 2010).

[12] QCD の β 関数の導出は，場の量子論の代表的教科書：M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory* (Westview Press, 1995), §16.4.

[13] カイラル有効理論の導出を含む対称性の破れは，提案者による教科書：S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.II (Cambridge Univ. Press, 1996) [特に §19].

[14] 格子ゲージ理論の教科書としては，H.J. Rothe, *Lattice Gauge Theories: An Introduction*, 4th Ed., World Scientific Lecture Notes in Physics (World Scientific, Singapore 2012).

[15] また，邦文の入門書としては，青木慎也，格子上の場の理論 [シュプリンガー現代理論物理学シリーズ]（丸善出版, 2012）.

[16] カイラルランダム行列の QCD への応用については，総合報告：J.J.M. Verbaarschot and T. Wettig, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **50** (2000) 343 [arXiv:hep-ph/0003017].

[17] 本稿で述べた事項の詳細な説明に加えてカオス的物理系の例を多く含む入門書としては，中村勝弘，カオスと量子物理学（SGC ライブラリ **1**, サイエンス社, 1997 年）.

[18] 周期軌道論への導入は，数理科学：跡公式（サイエンス社, 1999 年 3 月号）; 別冊数理科学：量子カオスの物理と数理（サイエンス社, 2000 年 4 月）.

[19] 物理学への応用を念頭にした群論の読みやすい教科書は，A. Zee, *Group Theory in a Nutshell for Physicists* (Princeton Univ. Press, 2016). 特に，付録 B に要約した表現論は同書 §II を参照せよ.

第 1 章

[20] M.V. Berry and M. Tabor, Proc. Roy. Soc. A **356** (1977) 375.

[21] P. Sarnak, Harmonic Analysis and Number Theory (Montreal, PQ, 1996) 181, CMS Conf. Proc. **21**, Amer. Math. Soc. (1997).

[22] Z. Cheng, J.L. Lebowitz, and P. Major, Probab. Theory Related Fields **100** (1994) 253.

[23] O. Bohigas, M.J. Giannoni, and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1.

[24] S. Müller, S. Heusler, A. Altland, P. Braun, and F. Haake, New J. Phys. **11** (2009) 103025 [arXiv:0906.1960[nlin.CD]].

第 2 章

[25] F.J. Dyson, J. Math. Phys. **3** (1962) 1199.

[26] 以下の説明の流れは S. Gnutzmann and B. Seif, Phys. Rev. E **69** (2004) 056219 [arXiv:nlin/0309049] に沿う.

[27] M.R. Zirnbauer, J. Math. Phys. **37** (1996) 4986 [arXiv:math-ph/9808012].

[28] P. Desrosiers and P.J. Forrester, Nonlinearity **19** (2006) 1643 [arXiv:math-ph/0604027].

第 3, 4 章

[29] P. Zinn-Justin, Nucl. Phys. B **497** (1997) 725 [arXiv:cond-mat/9703033].

[30] L. Pastur and M. Shcherbina, J. Stat. Phys. **86** (1997) 109.

[31] A. Soshnikov, Comm. Math. Phys. **207** (1999) 697 [arXiv:math-ph/9907013].

[32] G. Akemann, P.H. Damgaard, U. Magnea, and S. Nishigaki, Nucl. Phys. B **487** (1997) 721 [arXiv:hep-th/9609174].

[33] M. Vanlessen, Constr. Approximation **25** (2007) 125 [arXiv:math/0504604[math.CA]].

[34] A. Borodin and P.J. Forrester, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2005) 2963 [arXiv:math-ph/0205007].

[35] C.A. Tracy and H. Widom, Comm. Math. Phys. **163** (1994) 33 [arXiv:hep-th/9306042].

[36] F. Bornemann, Math. Comp. **79** (2010) 871 [arXiv:0804.2543[math.NA]].

第 5 章

[37] J.J.M. Verbaarschot and M.R. Zirnbauer, J. Phys. A: Math. Gen. **18** (1985) 1093.
[38] R. Brower, P. Rossi and C.-I. Tan, Nucl. Phys. B **190** (1981) 699.
[39] T. Guhr and T. Wettig, J. Math. Phys. **37** (1996) 6395 [arXiv:hep-th/9605110].
[40] A.D. Jackson, M.K. Şener, and J.J.M. Verbaarschot, Phys. Lett. B **387** (1996) 355 [arXiv:hep-th/9605183].
[41] H. Leutwyler and A. Smilga, Phys. Rev. D **46** (1992) 5607.
[42] K. Splittorff and J.J.M. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 041601 [arXiv:cond-mat/0209594].
[43] E. Kanzieper, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 250201 [arXiv:cond-mat/0207745].
[44] K.B. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos* (Cambridge University Press, New York, 1997).
[45] M.R. Zirnbauer, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996) 7113 [arXiv:chao-dyn/9609007].
[46] S. Ryu, A.P. Schnyder, A. Furusaki, and A.W.W. Ludwig, New J. Phys. **12**, 065010 (2010) [arXiv:0912.2157[cond-mat]].
[47] S.M. Nishigaki, D.M. Gangardt, and A. Kamenev, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 3137 [arXiv:cond-mat/0207301].

第 6 章

[48] A. Jaffe and E. Witten, in *Millennium Problems*, Clay Mathematics Institute (2000), `http://www.claymath.org/sites/default/files/yangmills.pdf`.
[49] K.G. Wilson, Phys. Rev. D **10** (1974) 2445.
[50] H.B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B **185** (1981) 20.
[51] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **72** (1974) 461.
[52] D.J. Gross and E. Witten, Phys. Rev. D **21** (1980) 21.
[53] S.R. Wadia, Phys. Lett. B **93** (1980) 403.
[54] T. Eguchi and H. Kawai, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1063.
[55] R. Narayanan and H. Neuberger, PoS (LATTICE2005), 005 [arXiv:hep-lat/0509014].
[56] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa, and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **498** (1997) 467 [arXiv:hep-th/9612115].
[57] K. Erickson, G.W. Semenoff, and K. Zarembo, Nucl. Phys. B **582** (2000) 155 [arXiv:hep-th/0003055].
[58] R. Dijkgraaf and C. Vafa, arXiv:hep-th/0208048.
[59] N.A. Nekrasov, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2004) 831 [arXiv:hep-th/0206161].
[60] L.F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, Lett. Math. Phys. **91** (2010) 167 [arXiv:0906.3219[hep-th]].

[61] R. Dijkgraaf and C. Vafa, arXiv:0909.2453 [hep-th].

[62] M. Mariño, Commun. Math. Phys. **253** (2002) 25 [arXiv:hep-th/0207096].

[63] O. Aharony, O. Bergman, D.L. Jafferis and J. Maldacena, JHEP **10** (2008) 091 [arXiv: 0806.1218[hep-th]].

[64] A. Kapustin, B. Willett, and I. Yaakov, JHEP **03** (2010) 089 [arXiv:0909.4559 [hep-th]].

[65] M. Mariño and P. Putrov, J. Stat. Mech. **1203** (2012) P03001 [arXiv:1110.4066 [hep-th]].

第 7 章

[66] T. Banks and A. Casher, Nucl. Phys. B **169** (1980) 103.

[67] C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. B **234** (1983) 173.

[68] E. Bittner, H. Markum, and R. Pullirsch, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **96** (2001) 189 [arXiv:hep-lat/0009002].

[69] J. Gasser and H. Leutwyler, Phys. Lett. B **188** (1987) 477.

[70] E.V. Shuryak and J.J.M. Verbaarschot, Nucl. Phys. A **560** (1993) 306.

[71] K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C **38** (2014) 090001 and 2015 update.

[72] 超対称性への導入は，太田信義，坂井典佑，超対称性理論（SGC ライブラリ **51**, サイエンス社, 2006 年, 電子版 2016 年）.

[73] J.J.M. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 2531 [arXiv:hep-th/9401059].

[74] A. Smilga and J.J.M. Verbaarschot, Phys. Rev. D **51** (1995) 829.

[75] T. Nagao and S.M. Nishigaki, Phys. Rev. D **64** (2001) 014507 [arXiv:hep-lat/0012029].

[76] M.A. Halasz and J.J.M. Verbaarschot, Phys. Rev D **52** (1995) 2563 [arXiv:hep-th/ 9502096].

[77] D. Dalmazi, and J.J.M. Verbaarschot, Nucl. Phys. B **592** (2001) 419 [arXiv:hep-th/ 0005229].

[78] P.H. Damgaard and S.M. Nishigaki, Nucl. Phys. B **518** (1998) 495 [arXiv:hep-th/ 9711023].

[79] T. Nagao and S.M. Nishigaki Phys. Rev. D **62** (2000) 065007 [arXiv:hep-th/0003009].

[80] P.H. Damgaard, U.M. Heller, R. Niclasen, and K. Rummukainen, Phys. Lett. B **495** (2000) 263 [arXiv:hep-lat/0007041].

[81] P.H. Damgaard and S.M. Nishigaki, Phys. Rev. D **63** (2001) 045012 [arXiv:hep-th/ 0006111].

[82] J.J.M. Verbaarschot, arXiv:hep-th/9710114.

[83] G. Akemann and P.H. Damgaard, Phys. Lett. B **432** (1998) 390 [arXiv:hep-th/9802174].

[84] P.H. Damgaard, Phys. Lett. B **424** (1998) 322 [arXiv:hep-th/9711110].

[85] S.M. Nishigaki, PoS (LATTICE2015), 057 [arXiv:1606.00276[hep-lat]].

[86] T. Nagao and S.M. Nishigaki, Phys. Rev. D **63** (2001) 045011 [arXiv:hep-th/0005077].

[87] R.G. Edwards, U.M. Heller, and R. Narayanan, Phys. Rev. D **60** (1999) 077502 [arXiv:

hep-lat/9902021].

[88] P.H. Damgaard, U.M. Heller, and A. Krasnitz, Phys. Lett. B **445** (1999) 366 [arXiv:hep-lat/9810060].

[89] M.E. Berbenni-Bitsch, S. Meyer, A. Schäfer, J.J.M. Verbaarschot, and T. Wettig, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 1146 [arXiv:hep-lat/9704018].

[90] R.G. Edwards, U.M. Heller, J. Kiskis, and R. Narayanan, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 4188 [arXiv:hep-th/9902117].

[91] M.E. Berbenni-Bitsch, S. Meyer, and T. Wettig, Phys. Rev. D **58** (1998) 071502 [arXiv: hep-lat/9804030].

[92] J.B. Kogut, M.A. Stephanov, and D. Toublan, Phys. Lett. B **464** (1999) 183 [arXiv:hep-ph/9906346].

[93] J.B. Kogut, M.A. Stephanov, D. Toublan, J.J.M. Verbaarschot, and A. Zhitnitsky, Nucl. Phys. B **582** (2000) 477 [arXiv:hep-ph/0001171].

[94] G.V. Dunne and S.M. Nishigaki, Nucl. Phys. B **654** (2003) 445 [arXiv:hep-ph/0210219].

[95] F.J. Dyson, J. Math. Phys. **3** (1962) 1191.

[96] P.J. Forrester, T. Nagao, and G. Honner, Nucl. Phys. B **553** (1999) 601 [arXiv:cond-mat/9811142].

[97] S.M. Nishigaki, Phys. Rev. D **86** (2012) 114505 [arXiv:1208.3452[hep-lat]].

[98] S.M. Nishigaki and T. Yamamoto, PoS (LATTICE2014), 067 [arXiv:1501.07508[hep-lat]].

[99] P.H. Damgaard, K. Splittorff, and J.J.M. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 162002 [arXiv:1001.2937 [hep-th]].

[100] P.H. Damgaard, U.M. Heller, and K. Splittorff, Phys. Rev. D **86** (2012) 094502 [arXiv: 1206.4786 [hep-lat]].

[101] P.W. Anderson, Phys. Rev. **109** (1958) 1492.

[102] E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello, and T.V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 673.

[103] M.E.H. Ismail and D.R. Masson, Trans. Amer. Math. Soc. **346** (1994) 63.

[104] B.I. Shkhlovskii, B. Shapiro, B.R. Sears, P. Lambrianides, and H.B. Shore, Phys. Rev. B **47** (1993) 11487.

[105] K.A. Muttalib, Y. Chen, M.E.H. Ismail, and V.N. Nicopoulos, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 471 (1993).

[106] S.M. Nishigaki, Phys. Rev. E **59** (1999) 2853 [arXiv:cond-mat/9809147].

[107] M.A. Halasz and J.J.M. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 3920 [arXiv:hep-lat/9501025].

[108] T.G. Kovács, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 031601 [arXiv:0906.5373[hep-lat]].

[109] S.M. Nishigaki, M. Giordano, T.G. Kovács, and F. Pittler, PoS (LATTICE2013), 018 [arXiv:1312.3286[hep-lat]].

[110] T.G. Kovács and F. Pittler, Phys. Rev. D **86** (2012) 114515 [arXiv:1208.3475[hep-lat]].

第 8 章

[111] M.C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **12** (1971) 343.

[112] F. Wegner, Z. Phys. **49** (1983) 297.

[113] M. Sieber and K. Richter, Physica Scripta **T90** (2001) 128.

[114] J.H. Hannay and A.M. Ozorio de Almeida, J. Phys. A **17** (1984) 3429.

[115] J.P. Keating and S. Müller, Proc. R. Soc. Lond. A **463** (2007) 3241 [arXiv:0708.2375 [nlin.CD]].

索　引

欧字

ア

カ

サ

タ

ナ

ハ

マ

ヤ

ラ

ワ

著 者 略 歴

西垣 真祐
にし がき　しん すけ

1993 年　東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了
博士（理学）
1994 年　テクニオンイスラエル工科大学物理学科研究員（2001 年に再任）
以後，日本学術振興会海外特別研究員，同会特別研究員，
仁科記念財団海外派遣研究者としてニールスボーア研究所，
カリフォルニア大学サンタバーバラ校，ニューヨーク州立
大学ストーニーブルック校に在外を経て，
2001 年　コネティカット大学物理学科研究員
2003 年　島根大学総合理工学部物質科学科助教授
2012 年　島根大学大学院総合理工学研究科准教授，現在に至る．
専　門　素粒子理論，統計基礎論

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ - 127
『ランダム行列とゲージ理論　〈普遍性〉を通して捉える量子物理』
著　者　西垣 真祐
2016 年 9 月 10 日　初版発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人 森 平 敏 孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで．　　表紙デザイン：長谷部貴志

発行所　©　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 （代表）
〒151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ- 122：for Senior & Graduate Courses）

可解な量子力学系の数理物理

直交多項式の生み出す多様な展開

佐々木　隆　著

定価 2420 円

特殊直交多項式と可解な量子力学系との系統的な関係を解明することは古くて新しい数理物理の重要なテーマである．本書は著者自身によるものを含む研究の諸成果を今後の展開の大いなる可能性とともに紹介する．

サイエンス社